

OSTWALD'S KLASSIKER
EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 171.

JAKOB BERNOULLI

UNENDLICHE REIHEN

(1689—1704)

LHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

Nr. 61. **G. Green,** Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell,** Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler,** Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 75. **Axel Gadolin,** Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 76. **F. E. Neumann,** Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi,** Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz,** 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.20.

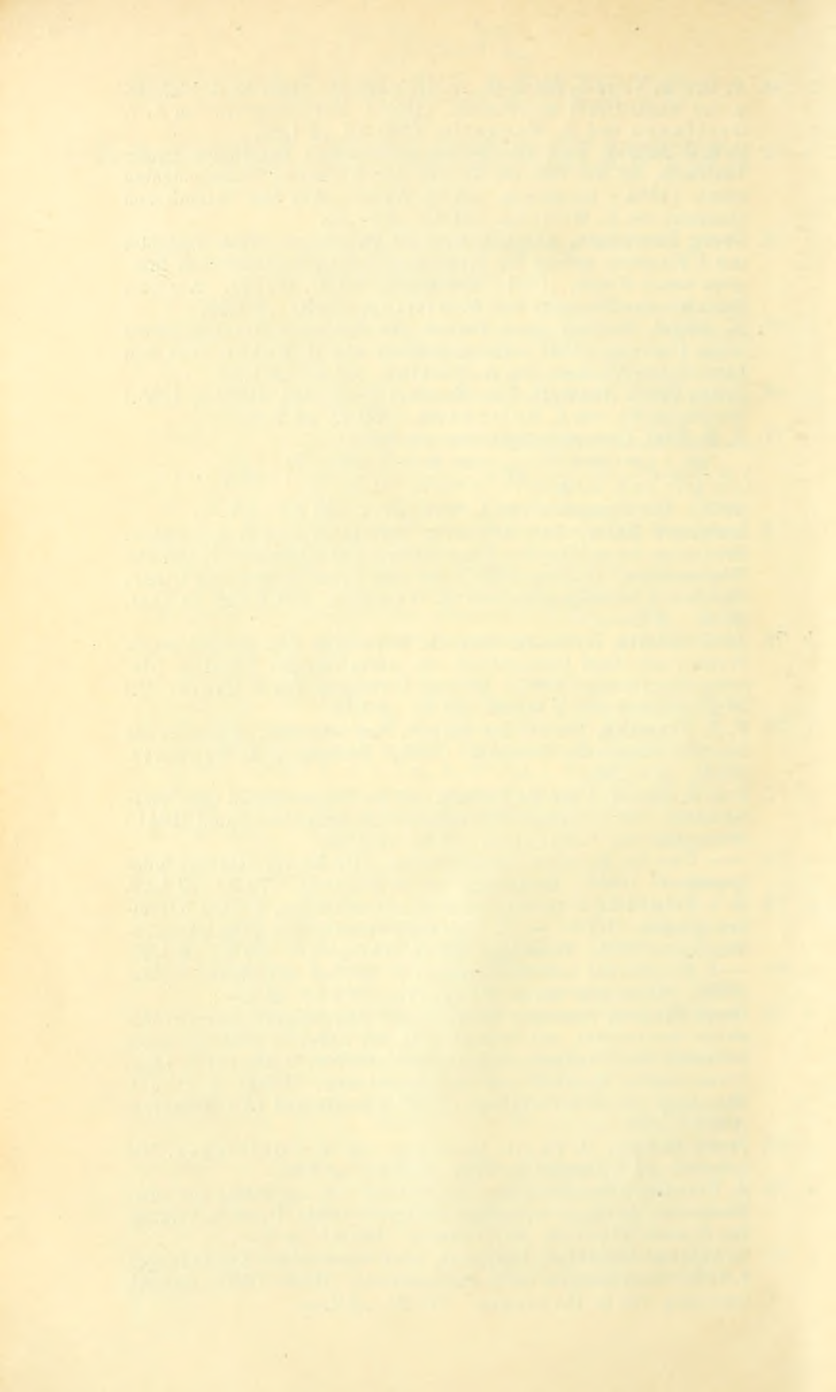
» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.—.

» 82. **Jacob Steiner,** Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. **Jacob Steiner.** II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. 128 S.) ℳ 2.—.



Über
unendliche Reihen
(1689—1704)

von

Jakob Bernoulli

Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

Dr. G. Kowalewski
Professor an der Universität Bonn

Mit 12 Figuren im Text

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1909



Wie die unendliche Reihe sich fügt zur endlichen Summe
Und der Grenze sich beugt, was dir grenzenlos scheint,
So im bescheidenen Körper verbirgt der unendlichen Gottheit
Spur sich, und grenzenlos wird, was doch so eng ist begrenzt.
Welche Wonne, zu schau'n im Unermessnen das Kleine
Und im Kleinen zu schau'n ihn, den unendlichen Gott!*)

(Jakob Bernoulli.)

*) Diese Verse finden sich in lateinischer Sprache am Anfang der folgenden Abhandlungen.



Arithmetische Sätze über unendliche Reihen und deren endliche Summe.

Von

Jakob Bernoulli.

Erster Teil.

(Basel, 1689.)

Vorwort.

Als ich unlängst dazu kam, über unendliche Reihen nachzudenken, war nächst der schon von andern behandelten geometrischen Progression die erste, deren Summe sich mir darbot, eine Reihe von Brüchen, deren Nenner in geometrischer, und deren Zähler in arithmetischer Progression wachsen. Ich teilte dies meinem Bruder mit, der nicht nur bald dasselbe noch einmal fand, sondern auch die Summe einer neuen Reihe von Brüchen herausbekam, deren Nenner die sogenannten Trigonalzahlen waren, multipliziert mit dem Faktor 2. Als er mir Nachricht gegeben hatte, entdeckte ich sie selbst am Tage darauf und legte ihm nun wieder einiges andere vor, was ich inzwischen bei dieser Gelegenheit gefunden hatte, wie ja ein Keil den andern treibt. Bei diesen Erfindungen haben wir uns gegenseitig im Wetteifer so gefördert, daß wir innerhalb weniger Tage nicht nur die Summen der Reihen angeben konnten, die der berühmte *Leibniz* in den Leipziger Acta eruditorum (1682, Februar und 1683, Oktober) bespricht[1]), und die wir kurz zuvor angestaunt hatten, sondern auch noch vieles andere auf gemeinsamer Grundlage fanden, was keineswegs zu verachten war. Das eine davon besteht

in der Auflösung einer Reihe in andere unendliche Reihen, das andere im Abziehen einer Reihe, die um eins oder das andere Glied verstümmelt ist, von der ganzen Reihe. Hiervon soll das Hauptsächlichste hier erörtert werden. (Ich habe nämlich bei denen, die ich bis jetzt las, nichts davon veröffentlicht gesehen.) Vorausschicken werde ich einige Sätze, die auch hier und da bei andern verbreitet sind, damit man sie nicht anderswo herzuholen braucht.

Wie notwendig übrigens und zugleich nützlich diese Betrachtung der Reihen ist, das kann dem nicht unbekannt sein, der es erkannt hat, daß eine solche Reihe bei ganz schwierigen Problemen, an deren Lösung man verzweifeln muß, gewissermaßen ein Rettungsanker ist, zu dem man als zu dem letzten Mittel seine Zuflucht nehmen darf, wenn alle andern Kräfte des menschlichen Geistes Schiffbruch gelitten haben.

Axiome oder Postulate.

I.

Jede Größe ist in Teile zerlegbar, die kleiner sind als sie selbst.

II.

Zu jeder endlichen Größe läßt sich eine größere wählen.

III.

Wird eine beliebige Größe, in der man einen Teil beseitigt hat, von der ganzen Größe abgezogen, so bleibt jener Teil übrig.[2])

Sätze.

I.

Was kleiner ist als jede gegebene Größe, das ist keine Größe mehr, d. h. nichts.

Wäre es nämlich eine Größe, so ließe es sich nach Axiom 1 in Teile zerlegen, die kleiner sind. Es wäre also nicht kleiner als jede gegebene Größe, gegen die Voraussetzung.

II.

Was größer ist als jede gegebene Größe, das ist unendlich.

Wäre es nämlich endlich, so könnte man nach Axiom 2 eine Größe wählen, die noch größer ist. Es wäre also nicht größer als jede gegebene Größe, gegen die Voraussetzung.

III.

Jede geometrische Progression läßt sich unbegrenzt fortsetzen.

Das kann in der Tat immer geschehen. Wie das erste Glied sich zum zweiten verhält, so das zweite zum nächsten, dieses nächste zu einem andern usw. ins Unendliche. Von diesen Gliedern kann keins gleich Null oder gleich Unendlich sein, weil sonst das vorhergehende nicht das Verhältnis zu ihm haben könnte, das das erste zum zweiten hat, gegen die Definition der Progression.

IV.

A, B, C, D, E sei eine geometrische Progression und A, B, F, G, H eine arithmetische mit ebensoviel Gliedern, die mit denselben Gliedern A und B anfängt. Dann sind die übrigen Glieder der geometrischen Progression größer als die entsprechenden der arithmetischen, also das dritte größer als das dritte, das vierte als das vierte, das letzte als das letzte und ebenso bei allen.

Da nämlich

$$A : B = B : C = C : D = D : E,$$

so wird nach *Euklid*[3]) (Buch 5, Satz 25)

$$A + C > 2B = A + F$$

(nach der Natur der arithmetischen Progression)

sein, mithin

$$C > F.$$

Ebenso wird sein

$$A + D > B + C > B + F = A + G,$$

mithin

$$D > G,$$

ferner

$$A + E > B + D > B + G = A + H,$$

mithin

$$E > H.$$

Das war aber zu beweisen.

V.

In einer wachsenden geometrischen Progression A, B, C, D, E kann man schließlich zu einem Gliede E gelangen, das größer ist als ein beliebig gegebenes Z.[4]

Es beginne mit denselben Gliedern die arithmetische Progression A, B, F, G, H, die so weit fortgesetzt sei, bis das letzte Glied H das Z übertrifft. (Daß dies möglich ist, liegt auf der Hand.) Darauf setze man die geometrische Progression bis auf ebensoviele Glieder fort. Nach dem vorigen Satze wird dann das letzte Glied E größer als H, also größer als Z sein, was zu beweisen war.

Folgerung. In einer wachsenden geometrischen Progression mit unendlich vielen Gliedern ist hiernach das letzte Glied ∞ (nach Satz 2). ∞ ist das Symbol des Unendlichen.[5]

VI.

Bei einer abnehmenden geometrischen Progression A, B, C, D, E gelangt man schließlich zu einem Gliede E, das kleiner ist als ein beliebig gegebenes Z.

Man bilde eine geometrische Progression Z, Y, X, V, T, die im Verhältnis $B : A$ aufsteigt, bis ihr letztes Glied T das A übertrifft. (Daß dies möglich ist, wissen wir aus dem vorigen Satze.) Nun setze man die andere abnehmend bis auf ebensoviele Glieder A, B, C, D, E fort. Dann wird ihr letztes Glied E kleiner sein als das gegebene Z. Da nämlich die Progressionen

$$A, B, C, D, E \text{ und } T, V, X, Y, Z$$

nach demselben Verhältnis $A : B$ fortschreiten und die gleiche Gliederzahl haben, so wird auch

$$A : E = T : Z$$

sein. Es ist aber nach Konstruktion $A < T$, also auch $E < Z$, was zu beweisen war.

Folgerung. In einer abnehmenden geometrischen Progression, die ins Unendliche fortgesetzt wird, ist also das letzte Glied 0, nach Satz 1.

VII.

In jeder geometrischen Progression A, B, C, D, E verhält sich das erste Glied zu dem zweiten wie die Summe aller mit Ausnahme des letzten zu der Summe aller mit Ausnahme des ersten.

$$A : B = (A + B + C + D) : (B + C + D + E).$$

Da nämlich

$$A : B = B : C = C : D = D : E,$$

so wird nach *Euklid*[6] (Buch 5, Satz 12)

$$A : B = (A + B + C + D) : (B + C + D + E)$$

sein, was zu beweisen war.

VIII.

Von einer beliebigen geometrischen Progression A, B, C, D, E die Summe S zu finden.

Nach dem vorigen Satze ist

$$A : B = (S - E) : (S - A)$$

und daher

$$A : (A \sim B) = (S - E) : (A \sim E).$$

Daraus folgt

$$S - E = A(A \sim E) : (A \sim B)$$

und

$$S = A(A \sim E) : (A \sim B) + E.$$

($\sim$ bezeichnet die Differenz der beiden Größen, zwischen denen es steht, wenn nicht erklärt wird, bei welcher der Überschuß ist.)

Folgerung. Wenn sich eine geometrische Progression abnehmend ins Unendliche fortsetzt, und daher nach Folgerung 6 ihr letztes Glied verschwindet, so ist die Summe aller Glieder

$$A^2 : (A - B).$$

Daraus ersieht man, wie auch unendlich viele Glieder eine endliche Summe bilden können.

IX.

Wenn die unendliche Reihe stetiger Proportionalen A, B, C, D, E usw. im Verhältnis A zu B abnimmt, und man bildet die Summe aller Glieder, die Summe aller mit Ausnahme des ersten, die Summe aller mit Ausnahme der beiden ersten usw., so sind das auch stetige Proportionalen, und zwar in demselben Verhältnis A zu B.

Da

$$A : B = B : C = C : D = \ldots$$

ist, so wird sowohl

$$A^2 : B^2 = B^2 : C^2 = \ldots$$

sein als auch

$$A : B = (A - B) : (B - C) = (B - C) : (C - D) = \ldots,$$

und daher, wenn man gleiche Verhältnisse durch gleiche dividiert,

$$\frac{A^2}{A - B} : \frac{B^2}{B - C} = \frac{B^2}{B - C} : \frac{C^2}{C - D} = \ldots$$

Dies bedeutet aber nach der vorigen Folgerung, daß sich die Summe aller Glieder zu allen auf das erste folgenden verhält wie diese zu allen auf das zweite folgenden usw., was zu beweisen war. Und es verhält sich ferner nach *Euklid* (Buch 5, Satz 19) die Summe aller zu allen auf das erste folgenden wie das erste zu dem zweiten, was zu beweisen war.

X.

In einer unendlichen Reihe von Brüchen

$$a : b, \ (a + c) : (b + d), \ (a + 2c) : (b + 2d), \ \ldots,$$

deren Zähler und Nenner in arithmetischer Progression wachsen, ist das letzte Glied der Bruch $c : d$, dessen Zähler und Nenner die Differenzen der Progressionen sind.[8])

Um dies analytisch herauszubekommen, betrachte man das gesuchte Glied als bekannt und nenne es t. Den Index des Gliedes betrachte man als die Unbekannte und bezeichne ihn mit n. Dann ist nach der Erzeugung der Progression das gewünschte Glied

$$t = (a + nc - c) : (b + nd - d)$$

und daher

$$n = 1 + (bt - a) : (c - dt),$$

was nun gleich Unendlich gesetzt werden muß. Der Zähler des Bruches ist endlich. (Er kann nämlich nicht unendlich sein, weil sonst t gleich ∞ sein müßte, und daher $(c - dt)$, also auch der Bruch, eine negative Größe wäre, was keinen Sinn hat.) Es ist demnach nötig, daß der Nenner gleich Null wird, und daraus folgt $c = dt$ und $t = c : d$, was zu beweisen war.

Kürzer geht es so: Aus der Entstehung der Reihe ist klar, daß das unendlichste Glied

$$(a + \infty c) : (b + \infty d) = \infty c : \infty d = c : d$$

lautet, was zu beweisen war.

Folgerung. Die Summe aller Glieder, mag das letzte größer oder kleiner als das erste sein, ist notwendig unendlich. Denn unendlich viele Glieder, die dem kleinsten dieser beiden gleich sind, geben eine unendliche Summe, um so mehr also die Glieder der Reihe selbst.[9]

XI.

Das Verhältnis eines Bruches zu einem andern setzt sich zusammen aus dem direkten Verhältnis der Zähler und dem umgekehrten der Nenner.

Es ist nämlich

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} : \frac{BC}{BD} = AD : BC = (A : C)(D : B),$$

was zu beweisen war.

XII.

Man habe eine Reihe von Brüchen, deren Zähler in arithmetischer und deren Nenner in geometrischer Progression wachsen, oder umgekehrt, wie

$$A : F, \quad (A + C) : G, \quad (A + 2C) : H, \quad (A + 3C) : J$$

oder

$$F : A, \quad G : (A + C), \quad H : (A + 2C), \quad J : (A + 3C).$$

Wenn dann der Index N eines Gliedes im Verhältnis zu 1 größer ist als G im Verhältnis zu $G - F$,

so wird jenes Glied im ersten Falle größer, im zweiten Falle kleiner sein als das folgende.[10]

Erster Fall. Da

$$N : 1 > G : G - F,$$

so wird

$$N : N - 1 < G : F$$

und

$$CN : CN - C < G : F.$$

Also ist

$$(CN - C)G > CN \cdot F$$

und um so mehr wegen $AG > AF$

$$(A + NC - C)G > (A + NC)F,$$

d. h. der Zähler des N-ten Gliedes mal G größer als der Zähler des folgenden Gliedes mal F. So verhält sich aber nach dem vorigen Satze das N-te Glied zu dem folgenden. Daher ist das N-te Glied größer als das folgende, und das gilt von jenem ab für alle folgenden, was zu beweisen war.

Zweiter Fall. Unter Umkehrung des Umzukehrenden wird der Satz in derselben Weise bewiesen.

XIII.

Wenn unendlich viele Brüche

$$\frac{A}{B},\ \frac{C}{D},\ \frac{E}{F},\ \frac{G}{H},\ \frac{J}{L},\ \frac{M}{N},\ \frac{O}{P} \text{ usw.}$$

vorliegen, deren Zähler in arithmetischer und deren Nenner in geometrischer Progression wachsen, so wird das letzte Glied 0 sein. Wenn jene in geometrischer und diese in arithmetischer Progression wachsen, so wird das letzte Glied ∞ sein.

Erster Fall. Wenn das erste Glied nicht größer als das zweite ist, so läßt sich die Progression doch so weit fortsetzen, daß das vorhergehende Glied das folgende übertrifft. (Vgl. den vorigen Satz.) Es sei also

$$G : H > J : L,$$

und $G, J, Q, R, \ldots$ seien unendlich viele stetige Proportionalen. Da auch $H, L, N, P, \ldots$ stetige Proportionalen sind, so gilt dies auch von den Brüchen

$$\frac{G}{H}, \frac{J}{L}, \frac{Q}{N}, \frac{R}{P}, \ldots$$

Sie gehen, weil

$$\frac{G}{H} > \frac{J}{L}$$

ist, schließlich in Null über, nach Folgerung 6. Da nun nach 4

$$Q > M, \quad R > O, \ldots$$

ist, so gehen um so mehr

$$\frac{G}{H}, \frac{J}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}, \ldots$$

in Null über, was zu beweisen war.

Zweiter Fall. Wenn das erste Glied nicht kleiner als das zweite ist, so setze man die Progression so weit fort, daß das vorhergehende Glied kleiner als das folgende ist. (Vgl. den vorigen Satz.) Es sei also

$$G : H < J : L,$$

und $H, L, S, T, \ldots$ seien unendlich viele stetige Proportionalen.

Da $G, J, M, O, \ldots$ stetige Proportionalen sind, so gilt dies auch von den Brüchen

$$\frac{G}{H}, \frac{J}{L}, \frac{M}{S}, \frac{O}{T}, \ldots$$

Sie gehen, weil

$$G : H < J : L$$

ist, schließlich ins Unendliche über, nach Folgerung 5. Da nun nach 4

$$S > N, \quad T > P, \ldots$$

ist, so wachsen um so mehr

$$\frac{G}{H}, \frac{J}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}, \ldots$$

ins Unendliche, was zu beweisen war.

XIV.

Die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen zu finden, deren Nenner in beliebiger geometrischer Progression wachsen, während die Zähler entweder nach den natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

oder nach den Dreieckszahlen

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots$$

oder nach den Pyramidalzahlen

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ \ldots$$

oder nach den Quadratzahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

oder nach den Kubikzahlen

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots$$

oder nach gleichen Vielfachen von ihnen fortschreiten.[11]

1. **Die Zähler schreiten nach den natürlichen Zahlen fort.**

Man findet die Summe, indem man die vorgelegte Reihe A in andere unendliche Reihen $B, C, D, E, \ldots$ zerlegt, die einzeln geometrische Progressionen bilden. Ihre Summen machen (wenn man hier die erste ausnimmt) nach 9 eine neue geometrische Progression F aus, deren Summe wie sonst nach Folgerung 8 gefunden wird. Man verfährt also wie folgt:

$$A = \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bd^2} + \frac{a+3c}{bd^3} + \cdots$$

$$= B + C + D + E + \cdots$$

$$B = \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd^2} + \frac{a}{bd^3} + \cdots = \frac{ad}{bd-b},$$

$$C = * + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{c}{bd-b},$$

$$D = * \quad * + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{c}{bd^2-bd},$$

$$E = * \quad * \quad * + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{c}{(bd - b)d^2}.$$

. . . .

Hieraus ergibt sich

$$F = C + D + E + \cdots = cd : b(d - 1)^2.$$

Addiert man dazu das erste Glied

$$B = ad : b(d - 1),$$

so ergibt sich als Summe der ganzen Reihe A

$$ad : b(d - 1) + cd : b(d - 1)^2.$$

2. Die Zähler schreiten nach den Dreieckszahlen fort.

Man muß die Reihe G in eine andere H auflösen, deren Zähler sich wie im vorigen Falle verhalten, und zwar in folgender Weise:

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bd^2} + \frac{10c}{bd^3} + \cdots$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{cd}{bd - b},$$

$$* + \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bd^2} + \frac{2c}{bd^3} + \cdots = \frac{2c}{bd - b},$$

$$* \quad * + \frac{3c}{bd^2} + \frac{3c}{bd^3} + \cdots = \frac{3c}{(bd - b)d},$$

$$* \quad * \quad * + \frac{4c}{bd^3} + \cdots = \frac{4c}{(bd - b)d^2}.$$

. . . .

Durch Addition dieser letzten Reihen ergibt sich

$$H = cd^3 : b(d - 1)^3,$$

da sich die Reihe

$$\frac{cd}{bd - b} + \frac{2c}{bd - b} + \frac{3c}{(bd - b)d} + \cdots$$

zu der vorhin betrachteten

$$\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bd^2} + \frac{3c}{bd^3} + \cdots = cd : b(d-1)^2$$

verhält wie d^2 zu $d-1$.

3. Die Zähler schreiten nach den Pyramidalzahlen fort.

Die Reihe wird in eine andere aufgelöst, deren Zähler nach Dreieckszahlen fortschreiten, und die sich zu der vorhin betrachteten Reihe verhält wie d zu $d-1$. Daraus findet man ihre Summe gleich $cd^4 : b(d-1)^4$.

Wenn allgemein die Zähler der vorgelegten Reihe wie die figurierten Zahlen irgend eines Grades laufen, so wird ihre Summe sich zu der Summe einer ähnlichen Reihe des vorhergehenden Grades verhalten wie d zu $d-1$. Danach ist es sehr leicht, die Summen aller übrigen derartigen Reihen zu finden.

4. Die Zähler schreiten nach den Quadratzahlen fort.

Die Reihe L wird in eine andere M aufgelöst, deren Zähler eine arithmetische Progression bilden, so daß sie zum Falle 1 gehört.

$$L = \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bd^2} + \frac{16c}{bd^3} + \cdots$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} + \cdots = \frac{cd}{bd-b},$$

$$* + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bd^2} + \frac{3c}{bd^3} + \cdots = \frac{3c}{bd-b},$$

$$* \quad * + \frac{5c}{bd^2} + \frac{5c}{bd^3} + \cdots = \frac{5c}{bd-b:d},$$

$$* \quad * \quad * + \frac{7c}{bd^3} + \cdots = \frac{7c}{bd-b:d^2},$$

. . . .

Die Summe M der letzten Reihen lautet

$$cd^2 : b(d-1)^2 + 2cd^2 : b(d-1)^3$$
$$= (cd^3 + cd^2) : b(d-1)^4.$$

5. Die Zähler schreiten nach den Kubikzahlen fort. Die Reihe wird in eine andere aufgelöst, deren Zähler die mit 6 multiplizierten und um 1 vermehrten Trigonalzahlen sind. Daher findet man ihre Summe nach Nr. 2 gleich

$$cd^2 : (bd-1)^2 + 6cd^3 : (bd-1)^4$$
$$= (cd^4 + 4cd^3 + cd^2) : (bd-1)^4.$$

Als Beispiele mögen folgende Reihen dienen:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots = 2$$

(Die Zähler sind die natürlichen Zahlen),

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32} + \cdots = 4$$

(Die Zähler sind die Dreieckszahlen),

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32} + \cdots = 8$$

(Die Zähler sind die Pyramidalzahlen),

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \cdots = 6$$

(Die Zähler sind die Quadratzahlen),

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32} + \cdots = 26$$

(Die Zähler sind die Kubikzahlen).

Folgerung. Es liegt auf der Hand, daß bei allen derartigen Reihen die letzten Glieder in Null übergehen und verschwinden müssen (was wir schon in einem früheren Satze bei einer von ihnen zum Überfluß gezeigt haben). Sonst könnten nämlich ihre Summen nicht endlich sein.

XV.

Die Summe einer unendlichen Reihe R von Brüchen zu finden, deren Zähler alle gleich, und deren Nenner die Dreieckszahlen oder dieselben Vielfachen von ihnen sind.[12]

Wenn von einer Reihe N harmonischer Proportionalen dieselbe Reihe ohne das erste Glied (sie heiße P) abgezogen

wird, so entsteht eine neue Reihe Q, deren Nenner die mit 2 multiplizierten Dreieckszahlen sind. Ihre Summe wird also gerade gleich dem ersten Gliede N der harmonischen Reihe sein, nach Axiom 3.

Das Verfahren ist folgendes:

Zieht man von der Reihe

$$N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \cdots$$

die Reihe

$$P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} + \cdots = N - \frac{a}{c}$$

ab, so bleibt die Reihe

$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} + \cdots = \frac{a}{c}$$

übrig. Ihr Doppeltes ist

$$R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} + \cdots = \frac{2a}{c},$$

d. h. die vorgelegte Reihe von Brüchen, deren Nenner die Dreieckszahlen oder dieselben Vielfachen von ihnen sind.

Es ist jedoch zu bemerken, daß man diese Methode nicht ohne Vorsicht anwenden darf. Zieht man nämlich von der im folgenden mit S bezeichneten Reihe dieselbe Reihe ohne das erste Glied (sie heiße T) ab, so ergibt sich dieselbe Reihe Q wie vorhin. Und doch folgt daraus nicht, daß die Summe der Reihe Q gleich dem ersten Gliede der Reihe S, d. h. gleich $2a : c$, ist. Der Grund dieser Erscheinung ist folgender. Wenn man von einer Reihe S eine Reihe T mit ebensovielen Gliedern abzieht, von der die dem letzten vorangehenden Glieder die einzelnen Glieder aufheben, die in der andern Reihe dem ersten Gliede folgen, so muß offenbar der Rest, d. h. die sich ergebende Reihe Q, gleich dem ersten Gliede von S weniger dem letzten Gliede von T werden. Sie kann daher nur dann genau gleich dem ersten Gliede von S sein, wenn das letzte Glied von T in Null übergeht, wie das augenscheinlich bei der Reihe P oder N der Fall ist. Bei der Reihe T oder S verschwindet aber das letzte Glied nicht, es ist vielmehr nach 10 gleich $a : c$. Daher ist die Summe der Reihe Q vielmehr

$$2a:c - a:c = a:c,$$

wie oben.

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \cdots;$$

$$T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} + \cdots,$$

$$S - T = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} + \cdots$$

$$= \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

XVI.

Die Summe einer unendlichen Reihe harmonischer Proportionalen,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

ist unendlich.

Dies bemerkte als erster mein Bruder.[13] Nachdem nämlich wie oben die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots$$

gefunden war, wollte er weiter sehen, was aus der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \cdots$$

herauskäme, wenn man sie nach der Methode in 14 auflöste. Dabei fand er die Richtigkeit des Satzes aus dem offenbaren Widersinn, der sich ergab, wenn für die harmonische Reihe eine endliche Summe angenommen wurde.

Er bemerkte nämlich, daß die Reihe

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

wenn man die einzelnen Brüche in andere mit den Zählern 1, 2, 3, 4, ... verwandelt, in

$$B = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42} + \cdots$$

übergeht. Nun setzte er

$$B = C + D + E + F + \cdots$$

und

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1 \text{ nach dem Vorigen}.$$

$$D = * + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = C - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$E = * \quad * + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = D - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$F = * \quad * \quad * + \frac{1}{20} + \cdots = E - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

. . . .

Daraus folgt

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = A,$$

also ein Teil gleich dem Ganzen, wenn die Summe endlich wäre.

Ich habe dann, als er es mir anzeigte, dasselbe in folgender Weise gezeigt. Die Summe der unendlichen harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

übertrifft jede gegebene Zahl. Also ist sie unendlich, nach Axiom 2.

N sei eine gegebene Zahl, so groß wie man will. Trenne vom Anfang der Reihe einige Glieder ab, deren Summe einer Einheit der Zahl N gleich ist oder sie übertrifft, und von der übrig bleibenden Reihe trenne wieder einige Glieder ab, deren Summe eine andere Einheit übertrifft, und wiederhole dies, wenn möglich, so oft, als es Einheiten in der Zahl N gibt. Dann werden die so abgetrennten Glieder alle zusammen die ganze Zahl übertreffen, und um so mehr wird die ganze Reihe sie übertreffen. Wenn du bestreitest, daß nach Abtrennung einiger Glieder die übrigen die Einheit übertreffen können, so sei das erste Glied von denen, die nach der letzten Abtrennung noch übrig geblieben sind, $1 : a$ und die folgenden $1 : a + 1$, $1 : a + 2$, $1 : a + 3$, ... Man bilde von den beiden ersten Gliedern $1 : a$ und $1 : (a + 1)$ ausgehend eine geometrische Progression. Die auf das zweite folgenden

Glieder in dieser Progression sind dann kleiner als die entsprechenden Glieder in der harmonischen Progression, wegen der größeren Nenner (vgl. IV). Man setze die geometrische Progression fort, solange ihre Glieder größer als $1 : a^2$ sind. (Das geht nur eine endliche Anzahl von Schritten weit, da a eine endliche Zahl ist.) Dann wird diese endliche geometrische Reihe nach VIII größer als 1.[14] Die harmonische Reihe mit ebensovielen Gliedern wird also die Einheit übertreffen, was zu beweisen war.

Folgerung. Wenn man bei der vorgelegten Reihe mit irgend einem Gliede den Anfang macht, so werden von da ab alle Glieder bis zu dem, dessen Stelle durch das Quadrat der Ordnungszahl jenes Anfangsgliedes bezeichnet wird, zusammen größer als 1 sein. So übertreffen die Glieder vom 2-ten bis 4-ten die Einheit, dann die Glieder vom 5-ten bis zum 25-sten, dann die vom 26-sten bis zum 676-sten ($676 = 26^2$), dann die vom 677-sten bis zum 458 329-sten ($458\,329 = 677^2$) usw. Denn in der geometrischen Progression übertreffen die durch diese Grenzen markierten Glieder die Einheit. Also tun sie es auch in der harmonischen, wo mehr und zugleich größere Glieder markiert werden. Größer sind diese Glieder, wie wir gesehen haben, und mehr sind es, weil die Nenner der Glieder, da sie nach IV kleiner sind als in der geometrischen Progression, langsamer jene Grenzen erreichen.[15]

2. Es liegt auf der Hand, daß jede andere unendliche harmonische Reihe ebenfalls eine unendliche Summe aufweist. So ist es z. B., wenn an Stelle von

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

die Reihe

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{4000} + \cdots$$

vorgelegt wird, wo die einzelnen Glieder die Tausendstel der ihnen entsprechenden in der andern Reihe sind, also auch alle ein Tausendstel von allen. Denn der tausendste Teil des Unendlichen ist selbst unendlich.

3. Die Summe einer unendlichen Reihe, deren letztes Glied verschwindet, ist manchmal endlich, manchmal unendlich.[16]

4. Wenn es erlaubt ist, eben einen Sprung in die Geometrie zu machen, so folgt auch, daß der Raum der zwischen einer

Hyperbel und ihren Asymptoten liegt, unendlich ist. Man denke sich eine Asymptote vom Mittelpunkt A aus in unendlich viele gleiche Teile geteilt. Die Teilpunkte seien B, C, D, E, ... Von ihnen ziehe man bis zur Kurve parallel zu der andern Asymptote die Geraden BM, CN, DO, EP, ... und vollende die Parallelogramme AM, BN, CO, DP, ... Diese werden sich wegen der Gleichheit der Grundlinien verhalten wie die Höhen oder wie die Strecken BM, CN, DO, EP, ..., d. h. wie $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ nach der Natur der Hyperbel. Da nun, wie wir gezeigt haben, die Summe

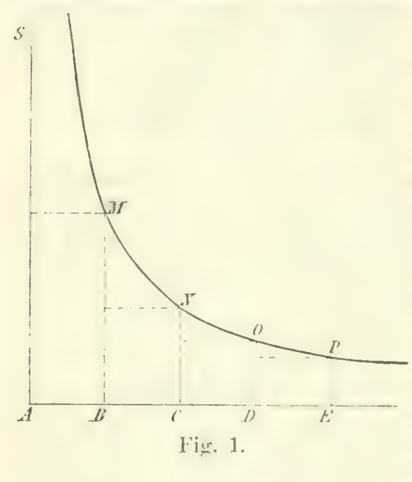


Fig. 1.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

unendlich ist, so wird auch die Summe der Parallelogramme AM, BN, CO, DP, ... unendlich sein und um so mehr der hyperbolische Raum, in dem jene Parallelogramme liegen.

XVII.

Die Summe der Leibnizschen Reihen D, H, J und anderer zu finden, deren Nenner Quadratzahlen oder Dreieckszahlen sind, vermindert um andere Quadratzahlen oder Dreieckszahlen.

Der berühmte *Leibniz* erwähnt bei Gelegenheit seiner wunderbaren Quadratur des Kreises, die er am Anfang der »Acta Lipsiensia« veröffentlicht hat, die Summen gewisser unendlicher Reihen, deren Nenner eine Reihe um 1 verminderter Quadratzahlen bilden, verheimlicht aber den Kunstgriff, durch den er sie gefunden hat. Hier ist in Kürze das ganze Geheimnis:

Von der Reihe

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

subtrahiere man sie selbst, der beiden ersten Glieder beraubt, also

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots = A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}.$$

Dann bleibt übrig

$$C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \cdots = A - B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

und daher ist

$$D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \cdots = \frac{1}{2}C = \frac{3}{4}.$$

Von der Reihe

$$E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

subtrahiere man sie selbst, des ersten Gliedes beraubt, also

$$F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots = E - 1.$$

Dann bleibt übrig

$$G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \cdots = E - F = 1,$$

und daher ist

$$H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \cdots = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2},$$

mithin

$$J = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \cdots = D - H = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

was man auch so zeigen kann.

Von der Reihe

$$L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots$$

subtrahiere man sie selbst, des ersten Gliedes beraubt, also

$$M = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots = L - \frac{1}{2}.$$

Dann bleibt übrig

$$N = \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} + \cdots = L - M = \frac{1}{2}.$$

und daher ist

$$A = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \cdots = \frac{1}{2} N = \frac{1}{4},$$

wie vorhin.

Es ist aber sehr bemerkenswert, daß man als Summe der Reihe

$$D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \cdots$$

(deren Nenner die um 1 verminderten Quadratzahlen 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... sind) $\frac{3}{4}$ findet, und ebensosehr, daß beim Überspringen jedes zweiten Gliedes die Summe der Reihe

$$H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots$$

gleich $\frac{1}{2}$ ist. Wenn man jedoch in dieser Reihe wieder jedes zweite Glied überspringt, so daß die Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots$$

übrig bleibt, so ist die Summe dieser unendlichen Reihe die wahre Größe eines Kreises, die sich durch keine Zahl ausdrücken läßt, wobei das Quadrat des Durchmessers gleich $\frac{1}{2}$ genommen ist.

Übrigens können wir allgemein die Summe jeder Reihe finden, deren Zähler alle gleich sind, und deren Nenner eine Reihe von Quadratzahlen bilden, vermindert um ein gemeinsames Quadrat Q, oder auch eine Reihe von Dreieckszahlen, vermindert um eine gemeinsame Dreieckszahl T. Wir brauchen nur zu bemerken, daß eine solche Reihe entsteht, wenn man von der harmonischen Reihe sie selbst abzieht, nachdem man

ihr so viele Anfangsglieder genommen hat, als die doppelte Quadratwurzel des gemeinsamen Quadrats Q angibt, bzw. die um 1 vermehrte doppelte Dreieckswurzel der Dreieckszahl T.

Um z. B. die Summe der Reihe

$$D = \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \cdots$$

zu finden, deren Nenner die um das gemeinsame Quadrat $Q = 9$ verminderten Quadratzahlen 16, 25, 36, 49, 64, 81, ... sind, subtrahiere man von der Reihe

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

sie selbst, ihrer 6 ersten Glieder beraubt (6 ist die doppelte Quadratwurzel von 9), also

$$B = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots$$

dann bleibt übrig

$$C = \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72} + \cdots = A - B$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = 2\frac{9}{20}.$$

Daher ist

$$D = \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} + \cdots = \frac{1}{6}C = \frac{49}{120}.$$

Um dagegen die Summe der Reihe

$$E = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \cdots$$

zu finden, deren Nenner die um die gemeinsame Dreieckszahl $T = 6$ verminderten Dreieckszahlen 10, 15, 21, 28, 36, 45, ... sind, subtrahiere man von der Reihe

$$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

sie selbst, ihrer 7 ersten Glieder beraubt (7 ist die um 1 vermehrte doppelte Dreieckswurzel von 6), also

$$F = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \cdots.$$

Dann bleibt übrig

$$G = \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98} + \cdots = A - F$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{363}{140}.$$

Daher ist

$$E = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{2}{7}G = \frac{363}{490}.$$

Man kann also mittels dieses Theorems die Summe der Reihen finden, wenn die Nenner Dreieckszahlen sind, vermindert um eine andere Dreieckszahl, oder Quadratzahlen, vermindert um eine andere Quadratzahl, und nach XV auch dann, wenn sie reine Dreieckszahlen sind wie bei der Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Bemerkenswert ist es aber, daß die Auffindung der Summe, wenn die Nenner reine Quadratzahlen sind, wie bei der Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots,$$

schwieriger ist, als man erwarten sollte. Daß die Summe endlich ist, sieht man an der andern, die offenbar größer ist. Wenn jemand es findet und uns mitteilt, was bisher unserer Bemühung gespottet hat, so werden wir ihm sehr dankbar sein.[17]

Auf eins sei hier wenigstens noch hingewiesen. Der Raum, den die kubische Hyperboloide, deren Natur durch die Gleichung

$$x^2 y = a^2 b$$

ausgedrückt wird (die Quadrate der Abszissen in bezug auf die Asymptoten umgekehrt proportional zu den Ordinaten), zusammen mit ihren Asymptoten einschließt, ist endlich. Man kann dies aus der Endlichkeit der Summe jener Reihe auf dieselbe Art beweisen, wie die Unendlichkeit des entsprechenden Raumes bei der Hyperbel selbst aus der Unendlichkeit der Summe der harmonischen Reihe bewiesen wurde.[18]

Zweiter Teil.

(Basel, 1692.)

Vorwort.

Das, was wir vor mehr als drei Jahren über die unendlichen Reihen erforscht haben, reicht noch aus, um ein paar Seiten zu füllen. Deshalb hielten wir es für gut, der ersten Disputation über diesen Gegenstand diese zweite anzufügen. Ich lasse sie unvermittelt beginnen unter Fortführung der Nummern der Sätze, damit man sie bequem zitieren kann.

XVIII.

Die Summe zu finden der reziproken unendlichen Reihe der Dreieckszahlen, der Pyramidalzahlen, der Trianguli-Pyramidalzahlen, der Pyramidi-Pyramidalzahlen und der figurierten Zahlen irgendwelcher höheren Ordnung ins Unendliche[19], außerdem die Summe dieser unendlich vielen Summen.

1. Wenn man von der Reihe der harmonisch fortschreitenden Brüche, d. h. von der reziproken Reihe A der natürlichen Zahlen diese Reihe selbst abzieht, aber ihres ersten Gliedes beraubt, so entsteht eine Reihe von Brüchen, deren Zähler gleich 1, und deren Nenner die doppelten Dreieckszahlen sind. Das geht aus dem Beweis XV hervor. Wenn man ebenso von der reziproken Reihe B der Dreieckszahlen sie selbst, ihres ersten Gliedes beraubt, abzieht, so entsteht eine Reihe von Brüchen, deren Zähler nach den natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, . . . fortschreiten, die sich aber auf Brüche reduzieren, deren Zähler alle gleich 2, und deren Nenner die dreifachen Pyramidalzahlen sind. Die Reihe selbst verhält sich also zu der reziproken Reihe C der Pyramidalzahlen wie $\frac{2}{3}$ zu 1. Zieht man nun von dieser reziproken Reihe der Pyramidalzahlen sie selbst ab, nachdem man sie des ersten Gliedes beraubt hat, so bleibt eine Reihe von Brüchen übrig, deren Zähler nach den Dreieckszahlen 3, 6, 10, 15, . . . fortschreiten, die sich aber auf andere reduzieren lassen, deren Zähler alle gleich 3, und deren Nenner die vierfachen Trianguli-Pyramidal-

zahlen sind. Daher verhält sich die Reihe selbst zu der reziproken Reihe D der Trianguli-Pyramidalzahlen wie $\frac{3}{4}$ zu 1. So geht es weiter ins Unendliche. Da nun nach Axiom 3 diese einzelnen Reihen, die sich durch die Subtraktion ergeben, und deren Zähler gleiche Vielfache der Einheit, deren Nenner gleiche Vielfache von figurierten Zahlen sind, den Wert 1 haben, so werden die reziproken Reihen der figurierten Zahlen der Reihe nach folgende Summen geben:

A. Natürliche Zahlen $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{0} = 1\frac{1}{0}$.

B. Dreieckszahlen $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots = \frac{2}{1} = 1\frac{1}{1}$.

C. Pyramidalzahlen $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

D. Triang.-Pyramidalz. $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

E. Pyram.-Pyramidalz. $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \cdots = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

. . . .

Diese Summen lauten von der zweiten B ab genommen so

$$1\frac{1}{1},\quad 1\frac{1}{2},\quad 1\frac{1}{3},\quad 1\frac{1}{4},\quad \cdots$$

Die Summe dieser Summen ist also

$$1\frac{1}{1} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \cdots$$

d. h. unendlich. Nimmt man den einzelnen Reihen ihre ersten Glieder, d. h. nimmt man von ihnen die Einheit fort, so wird die Summe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

d. h. wieder unendlich, nach XVI. Nimmt man aber außerdem noch die zweiten Glieder fort, also $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$, so wird die Summe endlich gleich $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, nach Axiom 3.

XIX.

Die Summe zu finden einer endlichen Reihe reziproker Dreieckszahlen, Pyramidalzahlen, Trianguli-Pyramidalzahlen, Pyramidi-Pyramidalzahlen und figurierter Zahlen irgend einer höheren Ordnung bis ins Unendliche.

Wir setzen die Gliederzahl in jeder dieser Reihen gleich n. Dann sind, wie wir an einer andern Stelle beweisen werden, die letzten Glieder in den direkten Reihen der natürlichen Zahlen, der Dreieckszahlen, der Pyramidalzahlen usw. der Reihe nach folgende:

$$\frac{n}{1},\quad \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},\quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots$$

Die unmittelbar auf diese folgenden Glieder lauten

$$\frac{n+1}{1},\quad \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2},\quad \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots$$

Daher werden die letzten Glieder in den entsprechenden reziproken Reihen folgende sein:

$$\frac{1}{n},\quad \frac{1\cdot 2}{n(n+1)},\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\ \ldots,$$

und die unmittelbar auf sie folgenden

$$\frac{1}{n+1},\quad \frac{1\cdot 2}{(n+1)(n+2)},\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\ \ldots$$

Wenn man nun nach der Methode des Satzes XV von irgend einer reziproken Reihe diese selbst subtrahiert, nachdem man sie am Anfang eines Gliedes beraubt und ihr am Schluß ein weiteres Glied angefügt hat, und dabei vom ersten Gliede das zweite, vom zweiten Gliede das dritte, vom letzten das auf das letzte folgende abzieht, so entsteht eine Reihe mit ebensoviel Gliedern. Sie ist nach dem beim vorigen Satze Gesagten $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ usw. von der reziproken Reihe

der figurierten Zahlen nächst höherer Ordnung. Außerdem ist sie aber nach den Bemerkungen in Satz XV gleich dem ersten Gliede vermindert um das auf das letzte folgende Glied derjenigen Reihe, aus der sie durch die Subtraktion entsteht. Daraus ergibt sich leicht die Summe einer endlichen Reihe von reziproken figurierten Zahlen beliebiger Ordnung, wie folgt.

B. (Dreieckszahlen) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1 \cdot 2}{n(n+1)}$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1} - 2 \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}.$$

C. (Pyramidalzahlen) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{(n+1)(n+2)}.$$

D. (Trg.-Pyramidalz.) $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

E. (Pyram.-Pyramidalz.) $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(n+1)(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

. . . .

XX.

Die Summe zu finden der unendlichen Reihe der reziproken Dreieckszahlen, Pyramidalzahlen, Trianguli-Pyramidalzahlen usw., nachdem man beliebig viele Anfangsglieder beseitigt hat; außerdem die Summe dieser unendlich vielen Summen.

1. Die Summe der ganzen Reihe der reziproken Dreieckszahlen, Pyramidalzahlen, Trianguli-Pyramidalzahlen usw. ist nach XVIII

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad \cdots$$

Trennt man bei jeder Reihe am Anfang n Glieder ab, so ist die Summe der abgetrennten Glieder nach XIX

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1},\ \frac{3}{1} - \frac{1 \cdot 3}{(n+1)(n+2)},\ \frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \ldots$$

Zieht man diese also von der Summe aller ab, so wird die Summe der übrigen Glieder lauten

$$\frac{2}{n+1},\ \frac{1 \cdot 3}{(n+1)(n+2)},\ \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \ldots$$

2. Die Summe aller Reihen, die um keins oder um das erste Glied verstümmelt sind, ist unendlich. Verstümmelt man die Reihen um die beiden ersten Glieder, so wird die Summe aller nach XVIII gleich $\frac{3}{2}$. Nimmt man noch die dritten Glieder fort (die die Reihe B der reziproken Dreieckszahlen bilden, der beiden ersten Glieder beraubt, so daß also die Summe $\frac{2}{3}$ beträgt), so wird die Summe aller übrigen Glieder

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$$

sein. Beseitigt man jetzt auch die vierten Glieder (die die Reihe C der reziproken Pyramidalzahlen bilden, wieder der beiden ersten Glieder beraubt, so daß also die Summe $\frac{2}{8}$ beträgt), so bleibt als Summe aller übrigen Glieder

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{8} = \frac{7}{12} = \frac{7}{3 \cdot 4}.$$

Wenn man nun weiter die fünften Glieder fortschneidet, so geht als Summe der übrigen

$$\frac{9}{4 \cdot 5}$$

hervor. Schneidet man die sechsten fort, so ergibt sich

$$\frac{11}{5 \cdot 6},$$

schneidet man die siebenten fort,

$$\frac{13}{6 \cdot 7},$$

usw.

Allgemein wird, wenn man in jeder Reihe die n ersten Glieder fortnimmt, die übrig bleibende Summe aller so verstümmelten Reihen

$$\frac{2n-1}{(n-1)n}$$

lauten.

Folgerung. Die Reihe

$$\frac{2}{n+1}+\frac{1\cdot 3}{(n+1)(n+2)}+\frac{1\cdot 2\cdot 4}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

oder

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1\cdot 2}{(n+1)(n+2)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

ist gleich

$$\frac{2n-1}{(n-1)n}.$$

Denn die einzelnen Glieder dieser Reihe drücken die einzelnen Summen der verstümmelten figurierten Reihen aus (nach Nr. 1) und daher alle Glieder die Summe aller dieser Reihen.

XXI.

Die Summe der Reihe

$$\frac{1a}{1\cdot 2}+\frac{2a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

d. h. der Reihe

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{1\cdot 3}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+\cdots$$

zu finden.

Diese Reihe entsteht, wenn man nach der Methode des Satzes XV von der Reihe

$$\frac{a}{1}+\frac{a}{1\cdot 2}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

sie selbst, ihres ersten Gliedes beraubt, abzieht. Ihre Summe ist daher gleich a, dem ersten Gliede obiger Reihe, nach Axiom 3.

Folgerung. Hiernach ist

$$F = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = 1,$$

$$G = * + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = F - \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1\cdot 2},$$

$$H = * \quad * + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = G - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$J = * \quad * \quad * + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = H - \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

. . . .

also
$$F + G + H + J + \cdots$$
$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

XXII.

Die Summen der Reihen K, L, M, N zu finden, deren Zähler eine arithmetische Progression bilden, während die Nenner die Quadrate der Dreieckszahlen oder die Quadrate um 1 verminderter Quadratzahlen sind.

$$K = \frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \frac{11}{15^2} + \frac{13}{21^2} + \cdots,$$

$$L = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{15^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{6}{35^2} + \frac{7}{48^2} + \cdots,$$

$$M = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{15^2} + \frac{3}{35^2} + \frac{4}{63^2} + \frac{5}{99^2} + \frac{6}{143^2} + \cdots,$$

$$N = \frac{3}{8^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{7}{48^2} + \frac{9}{80^2} + \frac{11}{120^2} + \frac{13}{168^2} + \cdots$$

Subtrahiert man von der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

sie selbst, ihres ersten Gliedes beraubt, so entsteht eine Reihe.

deren Glieder gleich $\frac{1}{4}$ der entsprechenden Glieder der Reihe K sind. Daher ist diese Reihe nach Axiom 3 gleich $4 \cdot \frac{1}{1^2} = 4$.

Subtrahiert man von derselben Reihe sie selbst, ihrer beiden ersten Glieder beraubt, so ergibt sich eine Reihe, die das Vierfache der Reihe L ist. Daher hat man nach demselben Axiom $L = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{16}$.

Subtrahiert man schließlich von der Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

sie selbst, ihres ersten Gliedes beraubt, so kommt eine andere Reihe heraus, die das Achtfache der Reihe M ist. Daher hat man nach Axiom 3 $M = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1^2} = \frac{1}{8}$. Mithin ist das Doppelte der Reihe M, d. h. alle Glieder mit ungeradem Index in L, gleich $\frac{1}{4}$, also die übrigen Glieder dieser Reihe, d. h. die Reihe N gleich $\frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

XXIII.

Die Summen der Reihen Q und R, ebenso V und X usw. zu finden, bei denen die Nenner die geometrischen Progressionen 1, 4, 16, 64, ...; 1, 9, 81, 729, ... usw. bilden, die Zähler aber die geometrischen Progressionen 1, 2, 4, 8, 16, ...; 1, 3, 9, 27, 81, ..., deren Glieder um die Einheit vermehrt oder vermindert sind.

Das Verfahren ist folgendes:

$$\left.\begin{aligned} O &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \\ P &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{4}{3} \end{aligned}\right| \text{ nach Folg. VIII}$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{1-1}{1} + \frac{2-1}{4} + \frac{4-1}{16} + \frac{8-1}{64} + \cdots \\ \text{oder } &\frac{0}{1} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \cdots \end{aligned}\right| = O - P = \frac{2}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{1+1}{1} + \frac{2+1}{4} + \frac{4+1}{16} + \frac{8+1}{64} + \cdots \\ \text{oder } \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \cdots \end{array}\right| = O + P = 3\frac{1}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2} \\ T = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \cdots = \frac{9}{8} \end{array}\right| \text{ nach Folg. VIII}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1-1}{1} + \frac{3-1}{9} + \frac{9-1}{81} + \frac{27-1}{729} + \cdots \\ \text{oder } \frac{0}{1} + \frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{26}{729} + \cdots \end{array}\right| = S - T = \frac{3}{8},$$

$$\left.\begin{array}{l} X = \frac{1+1}{1} + \frac{3+1}{9} + \frac{9+1}{81} + \frac{27+1}{729} + \cdots \\ \text{oder } \frac{2}{1} + \frac{4}{9} + \frac{10}{81} + \frac{28}{729} + \cdots \end{array}\right| = S + T = 2\frac{5}{8}.$$

Dasselbe kann man finden, indem man die vorgelegten Reihen Q, R, V und X nach der Methode des Satzes XIV auflöst. Es handle sich z. B. um die Reihe Q. Dann hat man

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \cdots = Y + Z + \Pi + \Sigma + \cdots$$

$$Y = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3} \text{ (nach Folg. VIII)},$$

$$Z = * + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \cdots = 2Y - \frac{2}{4} = \frac{1}{6},$$

$$\Pi = * \quad * + \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \cdots = 2Z - \frac{4}{16} = \frac{1}{12},$$

$$\Sigma = * \quad * \quad * + \frac{8}{256} + \cdots = 2\Pi - \frac{8}{64} = \frac{1}{24},$$

. . . .

$$Y + Z + \Pi + \Sigma = \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{2}{3}$$

(nach Folg. VIII).

XXIV.

Bei einer unendlichen Reihe, deren Zähler alle gleich, und deren Nenner entweder die natürlichen Zahlen oder die Quadrate, Kuben oder eine andere Potenz von ihnen sind, verhält sich die Summe aller Glieder mit ungeradem Index zu der Summe aller Glieder mit geradem Index wie dieselbe Potenz von 2, um 1 vermindert, zur Einheit, d. h. im Falle der natürlichen Zahlen wie 1 zu 1, im Falle der Quadrate wie 3 zu 1, im Falle der Kuben wie 7 zu 1, im Falle der Biquadrate wie 15 zu 1 usw.

Die Art, dies herauszufinden, ist folgende:

Fall der natürlichen Zahlen.

Die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

ist gleich $A + B + C + D + \cdots$, der Summe folgender Teilreihen[20]):

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{1} \\ B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{2}{3} \\ C &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots = \frac{2}{5} \\ D &= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \cdots = \frac{2}{7} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right| \text{ nach Folg. VIII.}$$

Sie ist also gleich

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \cdots$$

und daher ist

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

die Hälfte der vorgelegten Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$.

d. h. die Summe der Glieder mit ungeradem Index die Hälfte der ganzen Reihe, mithin gleich der Summe der übrigen Glieder

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

Hieraus ergibt sich wieder die Richtigkeit des Satzes XVI. Da nämlich

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}>\frac{1}{6},\quad \cdots$$

ist, so wird

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

sein, während doch beide, wie wir gezeigt haben, gleich sind. Dies läßt sich nur dann miteinander vereinigen, wenn die Summe beider Reihen unendlich gesetzt wird, d. h. so groß, daß die zwischen ihnen stattfindende Differenz die Beziehung der Gleichheit nicht zerstören kann.

Fall der Quadratzahlen.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=E+F+G+H+\cdots.$$

$$\left.\begin{aligned}
E&=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{4}{3.1}\\
F&=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{576}+\cdots=\frac{4}{3.9}\\
G&=\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{1600}+\cdots=\frac{4}{3.25}\\
H&=\frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{784}+\frac{1}{3136}+\cdots=\frac{4}{3.49}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\text{(nach Folg. VIII)}$$

Es ist also:

$$\frac{4}{3\cdot 1}+\frac{4}{3\cdot 9}+\frac{4}{3\cdot 25}+\frac{4}{3\cdot 49}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

mithin $\frac{3}{4}$ von der ersten Reihe, d. h.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots$$

gleich $\frac{3}{4}$ von der zweiten. D. h. die Glieder mit ungeradem Index in der vorgelegten Reihe machen $\frac{3}{4}$ der ganzen Reihe aus und die übrigen $\frac{1}{4}$. Daher verhält sich die Summe jener Glieder zu der Summe dieser wie 3 zu 1.

Dasselbe Untersuchungsverfahren beobachte man bei den übrigen Potenzen.

Anders und allgemein macht man es so:

$$x=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{6^m}+\cdots,$$

$$y=\frac{1}{1^m}\qquad+\frac{1}{3^m}\qquad+\frac{1}{5^m}\qquad+\cdots,$$

$$x-y=\qquad\frac{1}{2^m}\qquad+\frac{1}{4^m}\qquad+\frac{1}{6^m}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^m 1^m}+\frac{1}{2^m 2^m}+\frac{1}{2^m 3^m}+\cdots,$$

$$2^m x-2^m y=\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots=x.$$

Daraus folgt:

$2^m x - x = 2^m y$ und $y = x - x:2^m$ und $x - y = x:2^m$,

also:

$$y:(x-y)=\left(x-\frac{x}{2^m}\right):\frac{x}{2^m}=\left(1-\frac{1}{2^m}\right):\frac{1}{2^m}=(2^m-1):1.$$

Bemerkung. Es ist hiernach klar, daß die Summen von zwei Reihen, obgleich sie unbekannt sind, doch zueinander ein bekanntes Verhältnis haben können. Siehe Satz XVII, Schluß. Der Beweis läßt sich aber auch auf Wurzeln von Potenzen, d. h. auf gebrochene Potenzen, anwenden, nicht weniger als auf ganze. So erkennen wir z. B., daß bei der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{27}}+\frac{1}{\sqrt{64}}+\frac{1}{\sqrt{125}}+\cdots$$

(wo die Nenner die Quadratwurzeln der Kubikzahlen sind) alle Glieder mit ungeradem Index sich zu allen mit geradem Index verhalten wie $\sqrt{8} - 1$ zu 1. Wunderbar ist es aber, daß bei der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

(deren Summe unendlich ist, weil größer als $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ wegen der kleineren Nenner), die Glieder mit ungeradem Index zu denen mit geradem Index ein Verhältnis haben, für das man nach der Regel den Wert $\sqrt{2} - 1$ zu 1 findet. Sie verhalten sich also wie etwas Kleineres zu etwas Größerem, während doch jene mit diesen der Reihe nach verglichen offenbar größer sind. Den Grund dieses scheinbaren Widerspruches haben wir, obwohl er nach der Natur des Unendlichen einem endlichen Intellekt unbegreiflich vorkommt, dennoch zur Genüge durchschaut. Dasselbe läßt sich aber bei andern ähnlichen Reihen, die eine unendliche Summe haben, einsehen[21].

XXV.

Die Reihe in Satz X

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} - \frac{a+3c}{b+3d} + \cdots$$

und eine andere, harmonische Reihe mit ebensovielen Gliedern und denselben Nennern,

$$\frac{f}{b} - \frac{f}{b+d} + \frac{f}{b+2d} - \frac{f}{b+3d} + \cdots,$$

wobei die Zeichen + und − abwechselnd aufeinander folgen, haben dieselbe Summe, wenn man

$$f = a - \frac{bc}{d}$$

setzt.

Subtrahiert man nämlich die Glieder mit geradem Index von den Gliedern mit ungeradem Index, so kommt beidemal dieselbe Reihe heraus, nämlich:

$$\frac{ad - bc}{bb + bd} + \frac{ad - bc}{bb + 5bd + 6dd} + \cdots$$

oder

$$\frac{df}{bb + bd} + \frac{df}{bb + 5bd + 6dd} + \cdots$$

Die Reihe in Satz X sei z. B.:

$$\frac{3}{1} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \frac{11}{5} - \frac{13}{6} + \cdots,$$

und man setze

$$f = 3 - 2 = 1,$$

so daß die harmonische Reihe folgendermaßen lautet:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

Dann wird bei beiden die Summe gleich

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots,$$

also gleich einer Teilreihe der Reihe Q in Satz XV sein.

XXVI.

Bei einer unendlichen Reihe K von Brüchen deren Nenner in geometrischer Progression wachsen, so daß die folgenden dieselben ganzen Vielfachen der vorhergehenden sind, während hingegen die Zähler gleiche Vielfache der vorhergehenden sind, aber vermehrt oder vermindert um eine gemeinsame Zahl; die Summe und das letzte Glied zu finden.

$\pm$ bezeichne entweder überall + oder überall —, und es sei:

$$K = \frac{a}{c} + \frac{ab \pm d}{cm} + \frac{ab^2 \pm bd \pm d}{cm^2} + \frac{ab^3 \pm b^2d \pm bd \pm d}{cm^3}$$
$$+ \frac{ab^4 \pm b^3d \pm b^2d \pm bd \pm d}{cm^4} + \cdots.$$

1. Man findet die Summe der Reihe, indem man sie nach der Methode des Satzes XIV in Reihen rein proportionaler Brüche auflöst: $L + M + N + O + P + \cdots$.

$$L = \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{ab^2}{cm^2} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + \cdots = \frac{am}{c(m - b)}.$$

$$M = * \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{bd}{cm^2} \pm \frac{b^2d}{cm^3} \pm \frac{b^3d}{cm^4} + \cdots = \pm \frac{d}{(m-b)c},$$

$$N = * \quad * \pm \frac{d}{cm^2} \pm \frac{bd}{cm^3} \pm \frac{b^2d}{cm^4} + \cdots = \pm \frac{d}{(m-b)mc},$$

$$O = * \quad * \quad * \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{bd}{cm^4} + \cdots = \pm \frac{d}{(m-b)m^2c},$$

$$P = * \quad * \quad * \quad * \pm \frac{d}{cm^4} + \cdots = \pm \frac{d}{(m-b)m^3c},$$

. . . .

(nach Folg. VIII).

Die Summen der Reihen M, N, O, P . . . bilden eine neue geometrische Progression, deren Summe nach Folg. VIII

$$\frac{md}{(m-1)(m-b)c}$$

lautet. Addiert man sie zu der Summe $am:(m-b)c$ der Reihe L oder subtrahiert sie davon, so ergibt sich

$$\frac{am^2 - am \pm md}{(m-1)(m-b)c}.$$

Dies ist die Summe aller Reihen L, M, N, . . ., d. h. die Summe der vorgelegten Reihe K.

2. Man muß bemerken, daß im Falle $m > b$ die Summe endlich ist, und daß dann also das letzte Glied der Reihe verschwindet (siehe Folg. XIV).

Wenn dagegen $m < b$, so ist die Summe unendlich, und auch das letzte Glied unendlich. Dann sind nämlich die einzelnen geometrischen Progressionen L, M, N, . . ., wachsend. (Vgl. Satz V.)

Wenn aber $m = b$, so ist zwar die Summe unendlich, aber das letzte Glied ist endlich. Setzt man nämlich m an die Stelle von b, so wird

das zweite Glied $\frac{am \pm d}{cm}$, d. h. $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}$,

das dritte Glied $\frac{am^2 \pm md \pm d}{cm^2}$, d. h. $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cm^2}$,

das vierte Glied $\frac{am^3 \pm m^2d \pm md \pm d}{cm^3}$, d. h. $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cm^2} \pm \frac{d}{cm^3}$,

und daher das letzte Glied

$$\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{d}{cm^2} \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{d}{cm^4} \pm \dots$$

ins Unendliche.

Daraus geht hervor, daß das unendlichste Glied sich auflöst in $a:c$ plus oder minus einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem Verhältnis $m:1$. Die Summe dieser Reihe ist nach Folg. VIII $d:(m-1)c$. Sie gibt zu $a:c$ addiert oder davon subtrahiert

$$\frac{am - a \pm d}{(m-1)c}.$$

Das ist das unendlichste Glied. Der Zähler drückt die Differenz zwischen den Zählern des ersten und des zweiten Gliedes aus, ebenso der Nenner die Differenz zwischen den entsprechenden Nennern. Nun ist nach Satz X klar, daß das letzte Glied der folgenden Reihe

$$(Q)\quad \frac{a}{c},\quad \frac{am \pm d}{cm},\quad \frac{2am - a \pm 2d}{2cm - c},\quad \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c},$$
$$\frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c},\quad \dots$$

oder

$$\frac{a}{c},\quad \left(\frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm}\right),\quad \left(\frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm - c}\right),\quad \left(\frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3cm - 2c}\right),$$
$$\left(\frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm - 3c}\right),\quad \dots$$

gleich

$$\frac{am - a \pm d}{(m-1)c}$$

ist. Hieraus folgt, daß bei den beiden Reihen K und Q, wenn die beiden ersten Glieder übereinstimmen, auch die letzten dies tun, obwohl die Zunahmen oder Abnahmen bei der ersteren plötzlicher sind, da ja ihre Glieder nur sprungweise aus der letzteren herausgelesen sind. Ich finde nämlich, was bemerkenswert ist, daß das dritte Glied der Reihe K mit dem $m + 2$-ten Gliede der Reihe Q übereinstimmt, das vierte mit dem $m^2 + m + 2$-ten, das fünfte mit dem $m^3 + m^2 + m + 2$-ten, das sechste mit dem $(m^4 + m^3 + m^2 + m + 2)$-ten usf.

Das kann man an den nachstehenden Reihen sehen, wo a gleich 2, c gleich 3, b oder m gleich 3 und d gleich 1 ist.

$$(K)\quad \frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{22}{27},\ \frac{67}{81},\ \frac{202}{243},\ \cdots,\ \text{letztes Glied: } \frac{5}{6},$$

$$(Q)\quad \frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{12}{15},\ \frac{17}{21},\ \frac{22}{27},\ \frac{27}{33},\ \frac{32}{39},\ \frac{37}{45},\ \frac{42}{51},\ \frac{47}{57},\ \frac{52}{63},$$
$$\frac{57}{69},\ \frac{62}{75},\ \frac{67}{81},\ \cdots,\ \text{letztes Glied: } \frac{5}{6}.$$

Was über die Summe und das letzte Glied der Reihe K gesagt ist, gilt, wenn die Zähler gleiche Vielfache der vorhergehenden sind, vermehrt um die gemeinsame Zahl d oder vermindert um dieselbe Zahl, wobei dann aber noch $ab > a + d$ sein muß. Wenn nämlich $ab = a + d$, so werden die einzelnen Zähler gleich a. Die Summe der Reihe wird endlich, nämlich gleich $am : (m - 1)c$, und das letzte Glied verschwindet, mag auch $m < b$ oder $m = b$ sein.

XXVII.

Wenn man die Quadratwurzel einer beliebigen Zahl mit dieser Zahl multipliziert und die Quadratwurzel dieses Produktes noch einmal mit derselben Zahl, die Quadratwurzel dieses Produktes wieder und so fort ins Unendliche, dann wird die Quadratwurzel des letzten Produktes gleich der gegebenen Zahl sein.[22]

Es wird nämlich, wenn man die gegebene Zahl a nennt,

$$\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\ \text{usw.}\ )})})})})} = a$$

sein.

Man setze in der Tat

$$x = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\ \text{usw.}\ )})})})})}.$$

Dann wird

$$x^2 = a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\ \text{usw.}\ )})})}$$

und

$$x^2 : a = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\ \text{usw.}\ )})})} = x,$$

mithin

$$x^2 = ax \text{ und } x = a,$$

was zu beweisen war.

XXVIII.

Wenn man die Quadratwurzel einer beliebigen Zahl zu dieser Zahl addiert, und die Quadratwurzel der Summe noch einmal zu derselben Zahl, die Quadratwurzel dieser Summe wieder und so fort ins Unendliche, dann wird die Quadratwurzel der letzten Summe die Quadratwurzel der um $\frac{1}{4}$ vermehrten gegebenen Zahl um $\frac{1}{2}$ übertreffen.[23])

Es wird nämlich sein:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\text{usw.}}}}} = \tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+a}\,.$$

Man setze in der Tat

$$x = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\text{usw.}}}}\,.$$

Dann wird

$$x^2 = a+\sqrt{a+\sqrt{a+\text{usw.}}}$$

und

$$x^2 - a = \sqrt{a+\sqrt{a+\text{usw.}}} = x\,,$$

mithin

$$x^2 = x + a$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+a}\,.$$

XXIX.

Es seien zwei beliebige Zahlen gegeben. Man multipliziere die Quadratwurzel der einen mit der andern, die Quadratwurzel des Produktes wieder mit der ersten, die Quadratwurzel dieses Produktes wieder mit der zweiten und so immer die Wurzeln der Produkte abwechselnd mit der einen und der andern der gegebenen Zahlen. Das setze man ins Unendliche fort. Dann wird die Quadratwurzel des letzten Produktes gleich einer von zwei mittleren Proportionalen zwischen den beiden gegebenen Zahlen sein.[24])

Es wird nämlich, wenn die gegebenen Zahlen a und b heißen,

$$\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}}}}} = \sqrt[3]{a^2b}$$

sein.

Es sei in der Tat

$$x = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}}}.$$

Dann wird

$$x^2 = a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}}$$

und

$$x^2 : a = \sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}},$$

ferner

$$x^4 : a^2 = b\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}$$

und

$$x^4 : a^2b = \sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}} = x,$$

mithin

$$x^4 = a^2bx \text{ und } x^3 = a^2b,$$

also

$$x = \sqrt[3]{a^2b},$$

was zu beweisen war.

XXX.

Es seien zwei beliebige Zahlen gegeben. Man ziehe die dritte Wurzel aus dem Produkt beider und multipliziere sie mit der ersten von ihnen. Die Quadratwurzel dieses Produktes multipliziere man mit dem Produkt beider, die dritte Wurzel dieses Produktes wieder mit der ersten von ihnen, und so multipliziere man abwechselnd die dritten Wurzeln und die Quadratwurzeln mit der ersten Zahl. bzw. dem Produkt beider. Dann wird die Wurzel des letzten Produktes gleich der ersten oder zweiten von vier mittleren Proportionalen zwischen den beiden gegebenen Zahlen sein.[25]

Es ist nämlich

$$\sqrt{a\sqrt[3]{ab\sqrt{a\sqrt[3]{ab \text{ usw.}}}}} = \sqrt[5]{a^4b},$$

und

$$\sqrt[3]{ab\sqrt{a\sqrt[3]{ab\sqrt{a \text{ usw.}}}}} = \sqrt[5]{a^3b^2}.$$

XXXI.

Es seien zwei beliebige Zahlen gegeben. Man multipliziere die Quadratwurzel der zweiten mit der ersten und die Quadratwurzel des Produktes wieder mit der ersten, die Wurzel dieses Produktes aber mit der zweiten, und die Wurzel dieses Produktes wieder mit der ersten, und so multipliziere man die Wurzeln der Produkte abwechselnd zweimal mit der ersten und einmal mit der zweiten. Dann wird die Wurzel des letzten Produktes gleich der ersten, zweiten oder vierten von sechs mittleren Proportionalen zwischen den beiden gegebenen Zahlen sein.[26]

Es wird nämlich sein:

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b \text{ usw.}}}}}}} = \sqrt[7]{a^6 b}.$$

$$\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a \text{ usw.}}}}}}}} = \sqrt[7]{a^5 b^2}.$$

$$\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{a \text{ usw.}}}}}}} = \sqrt[7]{a^3 b^4}.$$

XXXII.

Es seien zwei beliebige Zahlen p und q gegeben. Wenn man irgend eine dritte mit q multipliziert zu p^2 addiert und von der Wurzel dieser Summe p subtrahiert, dann die mit q multiplizierte Wurzel des Restes zu p^2 addiert und von der Wurzel dieser Summe wieder p subtrahiert, und so fort ins Unendliche, so wird die Wurzel des letzten Restes, nämlich

$$\sqrt{-p+\sqrt{p^2+q\sqrt{-p+\sqrt{p^2+q\sqrt{-p+\text{usw.}}}}}}$$

eine Wurzel der kubischen Gleichung

$$x^3 = -2px + q$$

sein.[27]

XXXIII.

Wenn man alles so läßt wie soeben und nur die Subtraktion des p in eine Addition verwandelt, so wird die Wurzel der letzten Summe, nämlich

$$\sqrt{p+\sqrt{p^2+q\sqrt{p+\sqrt{p^2+q\sqrt{p+\text{usw.}}}}}}$$

eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 = 2px + q$$

sein.[28]

XXXIV.

Es seien zwei beliebige Zahlen p und q gegeben. Wenn man eine dritte mit q multipliziert von p^2 abzieht und die Wurzel des Restes zu p addiert oder davon subtrahiert, dann die mit q multiplizierte Wurzel der Summe oder Differenz von p^2 abzieht usw., so werden die Wurzeln der letzten Summe und Differenz, nämlich

$$\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q\sqrt{p \pm \ldots}}}}} \text{ usw.}$$

Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = 2px - q$$

sein.[29]

XXXV.

Ebenso wird, wenn drei Zahlen p, q, r gegeben sind,

$$\sqrt{-p + \sqrt{p^2 + r + q\sqrt{-p + \sqrt{p^2 + r + q\sqrt{-p + \ldots}}}}} \text{ usw.}$$

eine Wurzel der biquadratischen Gleichung

$$x^4 = -2px^2 + qx + r$$

sein.[30]

Alle diese Sätze werden auf dieselbe Art bewiesen wie die Sätze XXVII, XXVIII und XXIX. Wozu also sollen wir uns wiederholen!

Bemerkung. Es öffnet sich von hier aus ein Weg zur Auffindung zweier mittlerer Proportionalen und allgemein von Wurzeln körperlicher und überkörperlicher Probleme[31] mit Hilfe von geraden Linien und Kreisen allein, wonach die hervorragendsten Geometer aller Zeiten seit 2000 Jahren ängstlich, aber vergeblich gesucht haben. Ich habe dies, soweit es geschehen konnte, durch eine ins Unendliche fortzusetzende Konstruktionsreihe in den »Acta Lipsiensia« vom September 1689 als erster dargetan[32], während noch keiner etwas Derartiges schriftlich veröffentlicht, vielleicht auch nicht einmal den Gedanken gefaßt hatte.

Und dies ist die glücklichste Frucht unseres Nachdenkens über die unendlichen Reihen, die uns stets befriedigen wird. Wie wir sie allein der Güte der unendlichen Gottheit verdanken, so wünschen wir auch, daß sie zusammen mit unserer hier geleisteten Arbeit, welche Beschaffenheit diese auch immer haben mag, auf die größere Ehre Gottes gerichtet und ihr gewidmet sei.

Dritter Teil.

(Basel, 1696.)

Über die Anwendung der unendlichen Reihen bei Quadraturen von Flächenräumen und Rektifikationen von Kurven.

Vorwort.

Nachdem wir den ersten Teil unserer Arbeit erledigt und von verschiedenen Reihen, soweit es geschehen konnte, die Summen angegeben haben, erübrigt es, zu dem andern Teil unseres Beginnens überzugehen und die Art ihrer Anwendung zur Ausmessung geometrischer Größen zu zeigen, insbesondere derjenigen, die man als transzendent bezeichnet. Es wird freilich bei den Reihen, die hier zur Anwendung gelangen, selten passieren, daß sie zu der Zahl derjenigen gehören, die wir kurz zuvor betrachtet, und deren Summe wir in unserer Gewalt haben. Die Geometer haben nämlich bemerkt, daß es sehr viele Größen gibt, wozu die meisten krummen Linien und die meisten von ihnen begrenzten Flächenräume gehören, die sich durch keine Zahlen, seien sie rational oder surdisch und noch so sehr zusammengesetzt, ausdrücken lassen. D. h. die Relationen dieser Größen zu andern gegebenen Größen lassen sich unter keine algebraische Gleichung bestimmten Grades zwingen. Sie gehen vielmehr gewissermaßen über alle Gleichungsgrade hinaus. Daher glaubte man nun, versuchen zu müssen, ob es nicht gelänge, solche Größen, die man durch irgend eine Zahl nicht aussprechen konnte, wenigstens

durch eine Reihe unendlich vieler, hauptsächlich rationaler, auszudrücken und sich dem Gesuchten fortgesetzt zu nähern, derart, daß der Fehler schließlich kleiner würde, als eine beliebig gegebene Größe, und die ganze Reihe den genauen Wert des Gesuchten darstellte. Das ist eine Erfindung, die, soviel feststeht, erst an der Neige dieses Jahrhunderts *Mercator*, *Gregorius*, *Newton* und *Leibniz* ans Licht gebracht haben. Was die drei ersten darüber schriftlich überliefert haben, wissen wir jetzt noch nicht. Der große Geometer *Leibniz*, der den Gegenstand ohne Zweifel am meisten gefördert hat, gab unter andern Reihen, die er uns in den »Acta Lipsiensia« mitteilte, am Anfang der Acta, 1682, eine für die Größe des Kreises. Er hat aber die Methode, durch die er dazu gelangt ist, nirgends auseinandergesetzt. Wie ich vermute, ist sie von der unserigen nicht verschieden. Denn wir kommen zu denselben Reihen, wie er, und haben dabei seine Differentialrechnung benutzt, wie sich nachher zeigen wird. Die Anfangsgründe dieses Kalküls auseinanderzusetzen wäre zu lang und zu fernliegend. Der berühmte Marquis de l'Hospital behandelt sie klar in seinem Buche: »Über die Analysis des unendlich Kleinen«, das kürzlich erschienen ist, und auf das wir den lernbegierigen Leser verweisen.

Definition.

Gemischt nenne ich eine Reihe, deren Glieder durch Multiplikation aus den entsprechenden Gliedern anderer Reihen gebildet sind. Hat man z. B. die Reihen

$$a, b, c, d, e, \ldots \text{ und } f, g, h, i, k, \ldots,$$

so ist

$$af, bg, ch, di, ek, \ldots$$

die zugehörige gemischte Reihe.

XXXVI.

Den Bruch $l : m - n$ in eine unendliche Reihe geometrisch proportionaler Größen zu verwandeln.

Das geschieht durch fortgesetzte Division des Zählers durch den Nenner in folgender Weise: l durch m gibt $l : m$. Multipliziert man das mit dem Divisor $m - n$, und subtrahiert es dann von dem Dividend l, so bleibt $ln : m$ übrig. Dies wieder

durch m dividiert, gibt $ln : m^2$. Multipliziert man das mit $m - n$ und subtrahiert es von dem Rest des Dividenden, so ergibt sich $ln^2 : m^2$. Dies wieder durch m dividiert, gibt $ln^2 : m^3$. Multipliziert man das mit $m - n$ und subtrahiert es, so bleibt $ln^3 : m^3$. So geht es fort bis ins Unendliche. Immer bleibt nämlich etwas zu dividieren übrig, da ein eingliedriger Dividend von einem zweigliedrigen Divisor niemals ohne Rest erschöpft werden kann. Dieser Rest nimmt aber, wenn man die Operation fortsetzt und $m > n$ annimmt, beständig ab und wird offenbar schließlich kleiner als jede gegebene Größe. Daher ist der vorgelegte Bruch

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \cdots$$

Das ist eine Reihe von Größen, die geometrisch im Verhältnis von $m : n$ fortschreiten. Denn nach ihrer Herstellung liefert jedes Glied mit n multipliziert und durch m dividiert, das Nächstfolgende.

Kürzer erreicht man dasselbe auf folgende Weise. Die Summe der geometrischen Progression

$$\frac{l}{m} + \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \cdots$$

ist $l : \overline{m - n}$, nach Folg. VIII. Also läßt sich umgekehrt der Wert des Bruches $l : \overline{m - n}$ durch eine solche Reihe ausdrücken.

XXXVII.

Den Bruch $l : \overline{m + n}$ in eine unendliche Reihe geometrischer Proportionalen aufzulösen.

Bei fortgesetzter Division des Zählers durch den Nenner ergibt sich dieselbe Reihe wie vorhin, nur daß die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Es ist daher

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \cdots,$$

wenigstens wenn $m > n$ angenommen wird. Dann nimmt nämlich das, was nach den einzelnen Divisionen übrig bleibt, beständig ab, bis es, wenn die Operation bis ins Unendliche fortgesetzt wird, ganz verschwindet.

Dasselbe wird auch auf folgende Weise klar. Da in der Größenreihe

$$\frac{l}{m}, \quad \frac{ln}{m^2}, \quad \frac{ln^2}{m^3}, \quad \frac{ln^3}{m^4}, \quad \ldots$$

das erste zu dem zweiten Gliede sich verhält wie das dritte zum vierten, das fünfte zum sechsten usw., ebenso das zweite zum dritten wie das vierte zum fünften, das sechste zum siebenten usw., so verhält sich auch das erste zum dritten, wie das dritte zum fünften, das fünfte zum siebenten usw. Daraus sehen wir, daß das erste, dritte, fünfte, siebente, ... Glied nach Fortlassung der übrigen ebenfalls geometrische Proportionalen sind, deren Summe nach Folg. VIII gleich

$$\frac{lm}{m^2 - n^2}$$

gefunden wird. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß das zweite, vierte, sechste, ... Glied eine Reihe geometrischer Proportionalen bilden mit der Summe

$$\frac{ln}{m^2 - n^2}.$$

Daher ist die Differenz dieser beiden Reihen, d. h.

$$\frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \cdots = \frac{lm - ln}{m^2 - n^2}$$

$$= \frac{l}{m + n},$$

und daher kann umgekehrt die Größe $l : (m + n)$ in jene Reihe verwandelt werden.

Folgerung 1. Bei jeder absteigenden geometrischen Progression, deren erstes Glied bestimmt ist, und wo die Zeichen $+$ und $-$ abwechselnd aufeinander folgen, hat die Summe Grenzen, die sie nicht erreichen, viel weniger überschreiten kann, wie man auch das Verhältnis der Progression annimmt. Da nämlich nach Voraussetzung

$$0 < n < m$$

ist, so wird

$$\frac{l}{m + n} < \frac{l}{m + 0} = \frac{l}{m}$$

und

$$\frac{l}{m+n} > \frac{l}{m+m} = \frac{l}{2m};$$

d. h. der Wert der Reihe ist beständig kleiner als das erste Glied und größer als seine Hälfte.

Folgerung 2. Wenn jedoch $m = n$ ist, so wird

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{2m}$$

und die Reihe

$$\frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \cdots = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \cdots.$$

Daraus ergibt sich das nicht unelegante Paradoxon, daß

$$\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \cdots = \frac{l}{2m}$$

ist. Wenn man sich nämlich das letzte Glied mit dem Zeichen — behaftet denkt, so werden sich offenbar alle Glieder gegenseitig zerstören. Denkt man es sich mit dem Zeichen + behaftet, so sind sie zusammen scheinbar gleich $\frac{l}{m}$, nicht gleich $\frac{l}{2m}$. Der Grund dieses Paradoxons ist aber der, daß bei fortgesetzter Division von l durch $m + m$, der Divisionsrest sich nicht vermindert, sondern beständig gleich $\pm l$ bleibt. Daher ist auch der Quotient der Division eigentlich nicht bloß die Reihe

$$\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \cdots,$$

sondern

$$\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \cdots + \text{ oder } - \frac{l}{2m};$$

man muß nämlich aus dem Rest und dem Divisor einen Bruch bilden und ihm das Zeichen + oder — geben, je nachdem man sich das letzte Glied der Reihe mit — bzw. + behaftet denkt.

XXXVIII.

Den Bruch $l : \overline{m-n}^2$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Nach XXXVI ist

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{m} + \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \cdots$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $1 : m - n$, so erhält man

$$\frac{l}{\overline{m - n}^2} = A,$$

und A ist eine Reihe, deren einzelne Glieder sich nach XXXVI in ebensoviele andere Reihen $B, C, D, E, F, \ldots$ verwandeln lassen. Faßt man nun die entsprechenden Glieder dieser Reihen zu einer Summe zusammen, so bilden sie eine neue Reihe Z, die somit gleich der vorgelegten Größe $l : \overline{m - n}^2$ sein wird. Sie ist gemischt aus der Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ und der geometrischen Progression $\frac{l}{m^2}, \frac{ln}{m^3}, \frac{ln^2}{m^4}, \frac{ln^3}{m^5}, \ldots$

$$\frac{l}{(m - n)^2} = A = \begin{cases} \frac{l}{m(m - n)} = \frac{l}{m^2} + \frac{ln}{m^3} + \frac{ln^2}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \cdots \\ \frac{ln}{m^2(m - n)} = \ * \ + \frac{ln}{m^3} + \frac{ln^2}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \cdots \\ \frac{ln^2}{m^3(m - n)} = \ * \quad * \ + \frac{ln^2}{m^4} + \frac{ln^3}{m^5} + \cdots \\ \frac{ln^3}{m^4(m - n)} = \ * \quad * \quad * \ + \frac{ln^3}{m^5} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$Z = \frac{l}{m^2} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3ln^2}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \cdots;$$

Dieselbe Reihe Z kann man auch durch fortgesetzte Division des Zählers l durch den Nenner $m^2 - 2mn + n^2$ gewinnen, nämlich so: l durch m^2 gibt $l : m^2$. Multipliziert mit dem Divisor und vom Dividend subtrahiert bleibt $2ln : m - ln^2 : m^2$. $2ln : m$ durch m^2 finde ich gleich $2ln : m^3$. Multipliziert und subtrahiert, wie es sich gehört, bleibt der Rest $3ln^2 : m^2 - 2ln^3 : m^3$. So fährt man fort bis ins Unendliche. Man wird dabei bemerken, daß nach den einzelnen Operationen zwei Glieder übrig bleiben, daß sie aber immer kleiner und kleiner werden und schließlich näher als jede gegebene Größe an die Null heranrücken.

Dasselbe läßt sich auch auf dem umgekehrten Wege zeigen, indem man die Reihe Z nach der Methode des Satzes XIV in die unendlich vielen geometrischen Reihen $B, C, D, E, F, \ldots$

auflöst. Da nämlich ihre Summen die neue Reihe A bilden, die ihrerseits die Summe $l : m^2 - 2mn + n^2$ gibt, so folgt umgekehrt, daß auch diese Größe $l : (m-n)^2$ durch die Reihe Z richtig dargestellt werden kann.

XXXIX.

Den Bruch $l : (m+n)^2$ in eine Reihe zu verwandeln.

Wenn man so verfährt wie bei dem vorigen Satze, erhält man dieselbe Reihe wie dort, nur daß die Glieder mit geradem Index das Zeichen — annehmen. Man hat also

$$\frac{l}{(m+n)^2} = \frac{l}{m^2} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3ln^2}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \cdots.$$

XL.

Den Bruch $l : (m-n)^3$ oder $l : (m+n)^3$ durch eine Reihe auszudrücken.

Aus der Analogie mit den vorigen Operationen geht folgendes Verfahren deutlich hervor. Wozu also noch weiteres? Das Verfahren ist dies.

Nach XXXVIII hat man

$$\frac{l}{(m-n)^2} = \frac{l}{m^2} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3ln^2}{m^4} + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit $1 : m - n$

$$\frac{l}{(m-n)^3} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{l}{m^2(m-n)} = \dfrac{l}{m^3} + \dfrac{ln}{m^4} + \dfrac{ln^2}{m^5} + \cdots \\[2ex] \dfrac{2ln}{m^3(m-n)} = \ * + \dfrac{2ln}{m^4} + \dfrac{2ln^2}{m^5} + \cdots \\[2ex] \dfrac{3ln^2}{m^4(m-n)} = \ * \quad\ * + \dfrac{3ln^2}{m^5} + \cdots \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\} \text{nach Satz XXXVI.}$$

$$\frac{l}{m^3} + \frac{3ln}{m^4} + \frac{6ln^2}{m^5} + \cdots = \frac{l}{(m-n)^3}.$$

In derselben Weise erhält man

$$\frac{l}{(m+n)^3} = \frac{l}{m^3} - \frac{3ln}{m^4} + \frac{6ln^2}{m^5} - \cdots$$

Die Glieder dieser Reihen entstehen aber durch Multiplikation der Glieder einer geometrischen Progression mit den Dreieckszahlen 1, 3, 6, ...

Wenn einer dasselbe durch fortgesetzte Division zu erreichen wünscht, so wird er bemerken, daß nach den einzelnen Operationen drei Glieder übrig bleiben, daß sie aber fortgesetzt kleiner werden und zuletzt ganz verschwinden.

Dasselbe ergibt sich auch, indem man von der gefundenen Reihe rückwärts geht und sie nach der Methode des Satzes XIV in Reihen auflöst usw.

Bemerkung. Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man

$$\frac{l}{(m \mp n)^4} = \frac{l}{m^4} \pm \frac{4ln}{m^5} + \frac{10ln^2}{m^6} \pm \frac{20ln^3}{m^7} + \cdots$$

sowie

$$\frac{l}{(m \mp n)^5} = \frac{l}{m^5} \pm \frac{5ln}{m^6} + \frac{15ln^2}{m^7} \pm \frac{35ln^3}{m^8} + \cdots$$

Diese Reihen sind aus einer geometrischen und aus der Reihe der Pyramidalzahlen, bzw. der Trianguli-Pyramidalzahlen gemischt. So geht es konsequent weiter zu den höheren Graden, wobei immer dieselbe Analogie gewahrt bleibt. Daher ist es unnötig, länger dabei zu verweilen.

XLI.

Es sei eine geometrische Reihe von Differentialen vorgelegt, die mit einer andern Reihe von Konstanten oder Koeffizienten gemischt ist. Dann werden ihre absoluten Integrale eine Reihe bilden, die aus derselben Koeffizientenreihe, einer ähnlichen geometrischen Reihe von Unbestimmten und zudem einer gewissen harmonischen Reihe gemischt ist.[33])

Das geht aus den Anfangsgründen der Differentialrechnung oder der Summenrechnung hervor, wonach das absolute Integral der Differentialgröße

$$nx^m\,dx$$

gleich

$$\frac{n}{m+1}\,x^{m+1}$$

gefunden wird. Wenn also die Koeffizienten n eine beliebige Progression bilden, und die Exponenten m eine arithmetische

Progression, d. h. die x^m selbst eine geometrische, so werden auch die $m+1$ eine arithmetische, die x^{m-1} eine geometrische und die $1:(m+1)$ eine harmonische Progression bilden. Liegt z. B die Reihe von Differentialen

$$axdx,\ bx^3dx,\ cx^5dx,\ fx^7dx, \ldots$$

vor, die aus einer beliebigen Reihe $a, b, c, f, \ldots$ und der geometrischen $xdx, x^3dx, x^5dx, x^7dx, \ldots$ gemischt ist, so werden ihre Integrale

$$\frac{1}{2}ax^2,\ \frac{1}{4}bx^4,\ \frac{1}{6}cx^6,\ \frac{1}{8}fx^8, \ldots$$

aus derselben Reihe $a, b, c, f, \ldots$, der ähnlichen geometrischen Reihe $x^2, x^4, x^6, x^8, \ldots$ und der harmonischen Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ gemischt sein.

XLII.

Die Fläche der Hyperbel zwischen den Asymptoten durch eine unendliche Reihe darzustellen.

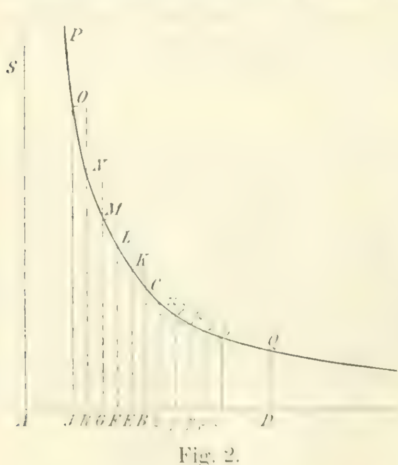


Fig. 2.

Erste Art. Nach der »Arithmetik des Unendlichen« von Wallis.

Es liege die Hyperbel PCQ vor (Fig. 2). Ihr Mittelpunkt sei A, ihre Asymptoten AD und AS. BC und JO (ιo) seien Ordinaten, und gesucht sei der Flächenraum $CBJO$ ($CB\iota o$). Ferner nehme man an:

$$AB = 1 = BD,$$

$$BC = b,$$

$$BJ\ (B\iota) = x,$$

und x sei nicht größer als AB (BD), d. h. als die Einheit. Man teile BJ ($B\iota$) in beliebig viele gleiche Teile

$$BE,\ EF,\ FG,\ GK,\ KJ,\ (B\varepsilon,\ \varepsilon\varphi,\ \varphi\gamma,\ \gamma\varkappa,\ \varkappa\iota).$$

Ihre Anzahl sei n, und die einzelnen Teile mögen d heißen, so daß

$$nd = r = BJ \; (B\iota)$$

ist. Dann beschreibe man um (in) die Hyperbel die Parallelogramme

$$BK,\ EL,\ FM,\ GN,\ RO\ (B\varkappa,\ \varepsilon\lambda,\ \varphi\mu,\ \gamma\nu,\ \varrho o),$$

indem man die Ordinaten

$$EK,\ FL,\ GM,\ RN,\ JO\ (\varepsilon\varkappa,\ \varphi\lambda,\ \gamma\mu,\ \varrho\nu,\ \iota o)$$

zieht, die nach der Natur der Hyperbel gleich

$$\frac{b}{1 \mp d},\quad \frac{b}{1 \mp 2d},\quad \frac{b}{1 \mp 3d},\quad \ldots,\quad \frac{b}{1 \mp nd}$$

gefunden werden. Multipliziert man sie also einzeln mit d, so erhält man die Flächen der Parallelogramme, die dann weiter nach XXXVI und XXXVII in Reihen zu verwandeln sind wie folgt:

$$BK\,(B\varkappa) = \frac{bd}{1 \mp d} = bd \pm bd^2 + bd^3 \pm bd^4 + \cdots,$$

$$EL\,(\varepsilon\lambda) = \frac{bd}{1 \mp 2d} = bd \pm 2bd^2 + 4bd^3 \pm 8bd^4 + \cdots,$$

$$FM\,(\varphi\mu) = \frac{bd}{1 \mp 3d} = bd \pm 3bd^2 + 9bd^3 \pm 27bd^4 + \cdots,$$

$$GN\,(\gamma\nu) = \frac{bd}{1 \mp 4d} = bd \pm 4bd^2 + 16bd^3 \pm 64bd^4 + \cdots,$$

. . . .

$$RO\,(\varrho o) = \frac{bd}{1 \mp nd} = bd \pm nbd^2 + n^2bd^3 \pm n^3bd^4 + \cdots.$$

Die ersten Glieder dieser Reihen sind gleich, die zweiten schreiten wie die natürlichen Zahlen fort, die dritten wie deren Quadrate, die vierten wie die Kuben usw. Setzt man nun die Anzahl n der Reihen oder der Parallelogramme unendlich, so ist die Summe der Parallelogramme, der umbeschriebenen wie der einbeschriebenen, von dem krummlinigen Gebiet $CBJO$ ($CB\iota o$) nicht verschieden. Dann wird außerdem die

Summe der Glieder in der ersten, zweiten, dritten. ... Vertikalreihe gleich 1 mal, $\frac{1}{2}$ mal, $\frac{1}{3}$ mal, ... der Summe von ebensovielen, d. h. n Gliedern, die gleich dem letzten sind.[4] Vgl., was *Wallis* darüber in seiner Arithmetik des Unendlichen lehrt, und wir an einer andern Stelle bewiesen haben. Daher wird die Summe aller Vertikalreihen, d. h. aller Parallelogramme, oder der Inhalt des hyperbolischen Gebietes $CBJO$ ($CB\iota o$) durch folgende Reihe ausgedrückt

$$nbd \pm \frac{1}{2} n^2 b d^2 + \frac{1}{3} n^3 b d^3 \pm \frac{1}{4} n^4 b d^4 + \cdots$$

oder, wenn man nd durch x ersetzt,

$$bx \pm \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} bx^3 \pm \frac{1}{4} bx^4 + \cdots.$$

Zweite Art. Nach der Leibnizschen Differentialrechnung. Setzt man wie vorhin

$$AB = 1 = BD,\ BC = b,$$
$$BJ\ (B\iota) = x$$

und das Element von x

$$RJ\ (\varrho\iota) = dx,$$

so wird nach der Natur der Hyperbel

$$JO\ (\iota o) = \frac{b}{1 \mp x}$$

sein, und das Element RO (ϱo) des hyperbolischen Raumes gleich

$$\frac{bdx}{1 \mp x},$$

also gleich der geometrischen Reihe

$$bdx \pm bxdx + bx^2 dx \pm bx^3 dx + bx^4 dx \pm \cdots,$$

nach XXXVI und XXXVII. Daher wird die Summe der Elemente,

$$\int \frac{bdx}{1 \mp x},$$

d. h. der Flächenraum $CBJO$ ($CB\iota o$), gleich

$$bx \pm \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} bx^3 \pm \frac{1}{4} bx^4 + \frac{1}{5} bx^5 \pm \cdots.$$

Das ist dieselbe Reihe wie vorhin, nämlich gemischt aus einer geometrischen und harmonischen Reihe. Wenn diese Reihe sich also summieren ließe, so hätte man die Quadratur der Hyperbel.

Folgerung 1. Wenn $BJ = B\iota$, so ist sowohl die Summe als auch die Differenz der Flächenräume $CBJO$ und $CB\iota o$ durch eine aus einer geometrischen und harmonischen gemischten Reihe gegeben. Wir haben nämlich gezeigt, daß

$$CBJO = bx + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 + \cdots,$$

$$CB\iota o = bx - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{5}bx^5 - \cdots$$

ist. Daraus folgt

$$CBJO + CB\iota o = 2bx \quad + \frac{2}{3}bx^3 \quad + \frac{2}{5}bx^5 \ldots$$

$$CBJO - CB\iota o = \quad bx^2 \quad + \frac{1}{2}bx^4 \quad + \frac{1}{3}bx^6 \ldots$$

Folgerung 2. Man setze

$$BJ(x) = BA(1).$$

Dann entsteht der unbegrenzte hyperbolische Raum $PCBAS$. Er ist also gleich

$$b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}b + \cdots,$$

d. h. gleich einer einfachen harmonischen Reihe. Da diese nach XVI unendlich ist, so läßt sie uns erkennen, daß auch der Inhalt jenes Raumes diese Beschaffenheit hat. Vgl. Folgerung 4 desselben Satzes.

Folgerung 3. Wenn

$$B\iota(x) = BD(1) = BC(b)$$

ist, so ergibt sich für den Raum $CBDQ$ die harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

Zieht man jedes mit dem Zeichen — behaftete Glied von dem vorhergehenden ab, erhält man die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots,$$

deren Glieder aus der Reihe Q der reziproken doppelten Dreieckszahlen in Satz XV, d. h. aus der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots,$$

sprungweise herausgepflückt sind. Nimmt man das Rechteck aus BC und AB oder BD viermal so klein, d. h. gleich $\frac{1}{4}$, so wird auch der Raum $CBDQ$ durch eine Reihe dargestellt, nämlich

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}+\cdots,$$

die ein Viertel der früheren ist. Sie wird durch Überspringen gebildet aus der Reihe J im Satz XVII. Vgl. Acta Lipsiensia. 1682, p. 46.

XLIII.

Den Inhalt des Raumes $ABEFS\ BD\varphi$ zu finden, der zwischen der Hyperbelasymptote AD und der Kurve $BEF\ B\varepsilon\varphi$ liegt, die so beschaffen ist, daß das Rechteck aus ihrer Ordinate $JE\ (\iota\varepsilon)$ und der konstanten Strecke AB, BC oder BD (die gleich 1 sein möge) gleich dem hyperbolischen Gebiet $CBJO$ $(CB\iota o)$ ist. Fig. 3.

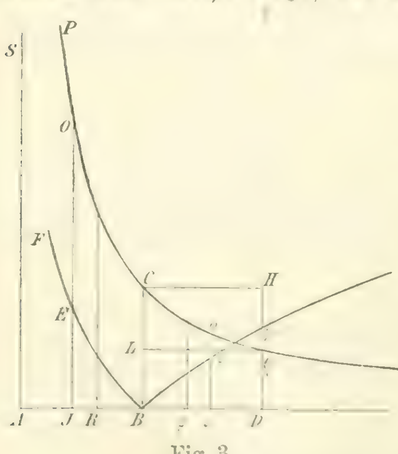


Fig. 3.

Wenn man $BJ = x$ setzt, so ist der hyperbolische Raum $CBJO$ gleich

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots.$$

Nach dem Obigen wird dieselbe Reihe auch die Länge der Ordinate JE bezeichnen (wegen $AB = BC = 1$). Multipliziert man sie mit JK oder dx, so gibt das

$$x\,dx-\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{3}x^3dx-\frac{1}{4}x^4dx+\cdots = EF.$$

d. h. gleich dem Element des Raumes BJE. Summiert man die Glieder dieser Reihe, so wird der Raum

$$BJE = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots,$$

d. h. gleich einer Reihe, die aus einer geometrischen Reihe und der reziproken Reihe der doppelten Dreieckszahlen gemischt ist. Sie verwandelt sich, wenn man noch $BJ(x) = BA(1)$ setzt, in die einfache reziproke Reihe der doppelten Dreieckszahlen, nämlich in

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots.$$

Die Summe dieser Reihe ist nach Satz XV gleich 1. Es ist also der ganze Raum $ABEFS$ absolut quadrierbar, nämlich gleich dem Quadrat von AB. Man beachte hier dieses Beispiel einer mechanischen Kurve, bei der eine spezielle Quadratur geht ohne die allgemeine. Wir haben nämlich die Summe der einfachen Reihe angegeben, die der gemischten aber nicht.

In derselben Weise zeigt man, daß der Raum $B\iota\varepsilon$ auf der andern Seite gleich

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \cdots$$

ist, und der ganze Raum $BD\varphi$ gleich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \cdots.$$

F o l g e r u n g. Wenn man die Rechtecke CD und BQ vollendet, so behaupte ich, daß das durch die mechanische Kurve begrenzte Gebiet $BD\varphi$ gleich dem doppelten hyperbolischen Gebiet CQL ist, die Differenz der Gebiete $ABEFS$ und $BD\varphi$ gleich dem doppelten Raum CQH und die Summe beider gleich $2\,CBDQ$. Das kommt so heraus. Zieht man von der Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

die Reihe

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \cdots$$

ab, indem man nacheinander vom ersten Glied das erste, vom zweiten das zweite, vom dritten das dritte fortnimmt usw., so bleibt

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \cdots$$

übrig, d. h. der Raum BDq, wie wir gezeigt haben. Zieht man aber dieselbe Reihe von der andern derart ab, daß ihr erstes Glied von dem zweiten der andern fortgenommen wird, ihr zweites vom dritten, ihr drittes vom vierten usw., so entsteht

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \cdots$$

$$= -1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} - \cdots$$

Das ist der doppelte hyperbolische Raum $CBDQ$ vermindert um BH, d. h.

$$2CBDQ - 2DL = 2CLQ.$$

Also ist

$$BDq = 2CLQ.$$

Da wir nun auch gezeigt haben, daß

$$ABEFS = 1 = BH = 2DL = 2LH$$

ist, so wird

$$ABEFS - BDq = 2LH - 2CLQ = 2CQH$$

und zugleich

$$ABEFS + BDq = 2DL + 2CLQ = 2CBDQ.$$

Das war aber zu beweisen.

XLIV.

Den Inhalt des Raumes $ABKGMT$ ($BDN\gamma K$) zu finden, der zwischen der Hyperbelasymptote AD und der Kurve KGM ($K\gamma N$) liegt, die so beschaffen ist, daß das Rechteck BJG ($Bi\gamma$) aus ihrer Ordinate JG ($i\gamma$) und der Unbestimmten BJ (Bi) gleich dem hyperbolischen Gebiet $CBJO$ ($CBi\omega$) ist. (Fig. 4.)

Setzt man alles wie früher, so ist der hyperbolische Raum $CBJO$ gleich

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots,$$

nach XLII. Es wird also nach der Voraussetzung, wenn man durch BJ oder x dividiert, die Strecke

$$JG = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots$$

und daher RG, das Element des Raumes $BJGK$, gleich

$$dx + \frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{3}x^2 dx + \frac{1}{4}x^3 dx + \cdots,$$

und alle RG, d. h. der Raum $BJGK$, gleich

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \cdots,$$

und wenn man $x = 1$ setzt, der ganze Raum $ABKGMT$ gleich

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

d. h. gleich der reziproken Reihe der Quadratzahlen, deren Summe wir auch jetzt noch nicht kennen. Vgl. Satz XVII, gegen Schluß.

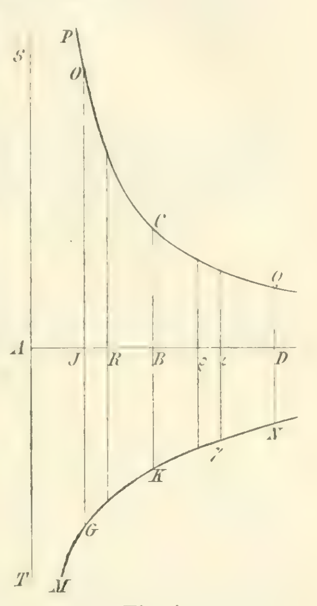


Fig. 4.

Auf ähnliche Weise findet man auf der andern Seite den Raum $B\iota\gamma K$ gleich

$$\frac{1}{1}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots.$$

und wenn man $x = 1$ setzt, den ganzen Raum $BDN\gamma K$ gleich

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Folgerung. Der Raum $ABKGMT$ ist das Doppelte des Raumes $BDN\gamma K$. Die Summe beider ist nämlich

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25} + \cdots$$

und die Differenz

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{36}+\cdots$$

Die Summe verhält sich also zur Differenz wie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots \text{ zu } \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\cdots,$$

d. h. wie 3 zu 1, nach Satz XXIV. Daher ist notwendig der eine Raum das Doppelte des andern, und doch haben wir von keinem der beiden die absolute Größe herausbekommen. Vgl. die Bemerkung in XXIV.

XLV.

Die Quadratur des Kreises oder die Rektifikation der Kreislinie durch eine Reihe zu bewirken. Fig. 5.

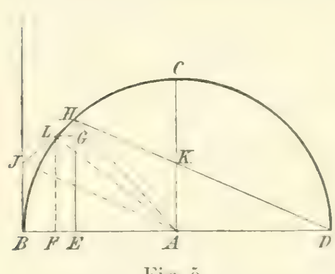


Fig. 5.

Man nehme auf der Peripherie des Halbkreises BCD einen Punkt H unbestimmt an und fälle von ihm aus auf den Radius AB das Lot HE. Ferner sei $AB=1$ und $BE=x$, also nach der Natur des Kreises

$$EH=\sqrt{2x-x^2}.$$

Wegen der Ähnlichkeit des charakteristischen Dreiecks LGH und des Dreiecks HEA verhält sich HE zu HA wie LG oder EF, das Element der Abszisse BE, zu LH, dem Element des Kreisbogens BH. Daraus findet man

$$LH=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Multipliziert man mit $\frac{1}{2}$, der Hälfte des Radius AH, so wird der Sektor HAL, d. h. das Element des Sektors HAB gleich

$$\frac{dx}{2\sqrt{2x-x^2}}.$$

Da diese Größe sich nicht absolut summieren läßt, so muß man sie in eine Reihe verwandeln. Vorher muß man aber die Irrationalität beseitigen, was etwa in der Weise geschieht, wie man es bei den diophantischen Aufgaben zu machen pflegt. Ich setze zu diesem Zweck

$$\sqrt{2x - x^2} = x : t$$

oder

$$2x - x^2 = x^2 : t^2.$$

Hier kann man durch x dividieren, so daß x nur in erster Dimension in der Gleichung stehen bleibt und sich daher in rationaler Form ergibt. Ebenso werden auch dx und $\sqrt{2x - x^2} = x : t$, also auch der Bruch $dx : 2\sqrt{2x - x^2}$, rational, und zwar ist

$$x = \frac{2t^2}{1 + t^2},$$

$$dx = \frac{4t\,dt}{(1 + t^2)^2},$$

$$\sqrt{2x - x^2} = \frac{x}{t} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

und endlich

$$\frac{dx}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Dieser Bruch gibt, wenn man ihn nach XXXVII in eine Reihe verwandelt:

$$dt - t^2dt + t^4dt - t^6dt + t^8dt - \cdots$$

Die Summe aller Elemente HAL, d. h. der ganze Sektor HAB ist also gleich

$$t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \cdots.$$

Dividiert man ihn durch den halben Radius oder durch $\frac{1}{2}$, so ergibt sich der Bogen

$$BH = \frac{2}{1}t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{2}{9}t^9 - \cdots.$$

Diese Reihen sind vgl. XLI gemischt aus einer geometrischen und harmonischen Reihe, und von ihrer Summation hängt also jenes abgedroschene Problem von der Quadratur des Kreises ab.

Man bemerke folgendes. Die in B und H an den Kreis gelegten Tangenten mögen sich in J schneiden, und die Verbindungslinie HD treffe den Radius AC in K. Dann ist

$$BJ \text{ oder } JH = AK,$$

beide aber gleich t. Denn man hat

$$2 \text{ Wink. } BAJ = BAH = AHD + ADH = 2\,ADH,$$

also
$$BAJ = ADH.$$

Da auch die Winkel ABJ und DAK gleich sind, ferner die Seiten AB und AD, so wird auch

$$BJ = AK$$

sein. Nach Voraussetzung verhält sich nun $1 : t$ wie $\sqrt{2x - x^2}$ zu x, ebenso aber, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DAK und DEH, AD oder 1 zu AK wie DE zu EH, d. h. nach der Natur des Kreises, wie HE zu EB oder wie $\sqrt{2x - x^2}$ zu x. Es wird also

$$1 : t = 1 : AK$$

sein, mithin

$$AK \text{ oder } BJ = t.$$

Folgerung 1. Man nehme $t = 1$ an. In diesem Fall wird BE oder x, d. h. $2t^2 : 1 + t^2$ gleich BA oder 1, und der Quadrant BAC gleich der einfachen harmonischen Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

oder, wenn man wirklich jedes mit dem Zeichen — behaftete Glied von dem vorhergehenden abzieht,

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \cdots.$$

Da sich nun das Quadrat des Radius zu dem Quadranten verhält wie das Quadrat des Durchmessers zu dem ganzen Kreise, so gilt folgendes: Wenn das Quadrat des Durchmessers, d. h. das dem Kreise umbeschriebene Quadrat 1 ist, also das einbeschriebene $\frac{1}{2}$, so wird der Inhalt des ganzen Kreises durch die eben erwähnte Reihe ausgedrückt. Wenn also das dem Kreis einbeschriebene Quadrat $\frac{1}{4}$ ist, so wird der Inhalt des Kreises

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots$$

sein. Die Glieder dieser Reihe sind sprungweise herausgepflückt aus der Reihe H in Satz XVII. Vgl. Acta Lipsiensia, 1682, S. 45.

Folgerung 2. Setzt man die Tangente $BJ = t$, so wird der Bogen, dessen Tangente sie ist, gleich

$$t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \cdots$$

sein, da er die Hälfte des Bogens BH ist. Vgl. Acta Lipsiensia, 1691, S. 179.

XLVI.

Allgemein den Sektor eines beliebigen Kegelschnitts vom Mittelpunkt aus durch eine Reihe darzustellen. (Fig. 6, 7.

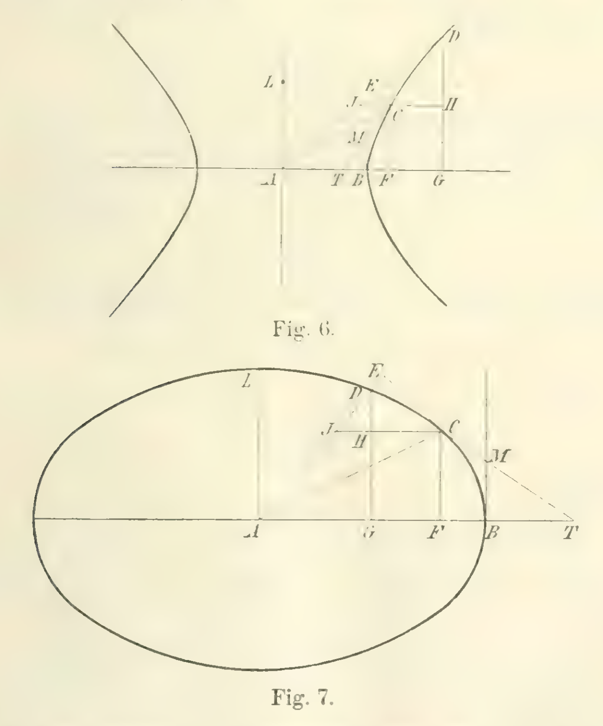


Fig. 6.

Fig. 7.

Es liege irgend ein Kegelschnitt BCD vor, eine Hyperbel oder eine Ellipse. Der Mittelpunkt sei A, B ein Scheitel,

$AB = a$ die halbe Transversalachse, $AL = 1$ die halbe konjugierte Achse. Man setze die unbestimmte Abszisse $BG = x$, $AG = z = a \pm x$ ($\pm$ bedeutet $+$ bei der Hyperbel und $-$ bei der Ellipse, $\mp$ dagegen $-$ bei der Hyperbel und $+$ bei der Ellipse), das Element davon FG oder $CH = dx = \pm dz$, die Ordinate $GD = y$, ihr Element $DH = dy$ und die Verbindungsstrecke des Punktes D mit dem Mittelpunkte $AD = u = \sqrt{x^2 + y^2}$. Man denke sich auch die Parallele HCJ zur Achse gezogen. Sie schneide die Kurve in C und die Gerade AD in J. Von C aus denke man sich das Lot CE auf AD gefällt. Nach diesen Festsetzungen wird zunächst nach der Natur der Kurve

$$a^2 : 1 = (\pm z^2 \mp a^2) : y^2$$

sein. Daher wird

$$a^2 y^2 = \pm z^2 \mp a^2 = 2ax \pm x^2$$

und, wenn man differenziert,

$$a^2 y\, dy = \pm z\, dz,$$

schließlich also

$$dy = \pm \frac{z\, dz}{a^2 y} = \frac{z\, dx}{a^2 y}.$$

Da nun wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DGA und DHJ

$$DG\,(y) \text{ zu } GA\,(z) \text{ wie } DH\,(dy) \text{ zu } HJ$$

ist, so findet man

$$HJ = \frac{z\, dy}{y}$$

und daher

$$CJ \text{ oder } HJ \mp HC = \frac{z\, dy}{y} - dz = \frac{z\, dy - y\, dz}{y}.$$

Nun ist wieder wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AGD und JEC

$$AD\,(u) \text{ zu } DG\,(y) \text{ wie } JC \left(\frac{z\, dy - y\, dz}{y}\right) \text{ zu } CE.$$

Daraus erhält man

$$CE = \frac{z\, dy - y\, dz}{u}.$$

Multipliziert man dies mit der Hälfte von AD, d. h. $\frac{1}{2}a$, so ergibt sich der Inhalt des Elementardreiecks

$$ACD = \frac{1}{2}(zdy - ydz).$$

Setzt man für dy seinen Wert ein, so kommt

$$\pm \frac{z^2dz}{2a^2y} - \frac{1}{2}ydz = \frac{\pm z^2dz - a^2y^2dz}{2a^2y}.$$

Ersetzt man a^2y^2 durch $\pm z^2 \mp a^2$, so entsteht

$$\frac{\pm z^2dz \mp z^2dz \pm a^2dz}{2a^2y} = \pm\frac{adz}{2ay} = \frac{adx}{2ay}$$

und, wenn man für ay noch $\sqrt{2ax \pm x^2}$ einführt,

$$\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm x^2}}.$$

Es handelt sich darum, diesen Ausdruck in eine Reihe zu verwandeln und zu summieren. Zunächst muß man aber die Irrationalität aus ihm beseitigen, mittels einer andern Unbestimmten, die statt x eingeführt werden muß, wie vorhin. Ich setze daher

$$\sqrt{2ax \pm x^2} = x : t$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{2at^2}{1 \mp t^2}$$

und

$$dx = \frac{4atdt}{(1 \mp t^2)^2},$$

ferner

$$\sqrt{2ax \pm x^2} = \frac{x}{t} = \frac{2at}{1 \mp t^2}$$

und endlich

$$\frac{adx}{2\sqrt{2ax \pm x^2}} = \frac{adt}{1 \mp t^2}$$

$$= adt \pm at^2dt + at^4dt \pm at^6dt + at^8dt \pm \cdots,$$

nach XXXVI und XXXVII. Die Summe aller Elementarsektoren ACD, d. h. der Inhalt des ganzen Sektors $ABCD$ ist also gleich

$$at \pm \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{5}at^5 \pm \frac{1}{7}at^7 + \frac{1}{9}at^9 \pm \cdots.$$

d. h. gleich einem Rechteck mit der Basis a, der halben Transversalachse, und der Höhe

$$t \pm \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \pm \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 \pm \dots .$$

Hieraus ersieht man, wie allgemein die Quadratur der Kegelschnitte sich auf Summen von Reihen reduziert, die aus geometrischen und harmonischen gemischt sind.

Man bemerke folgendes. Die im Scheitel B und im Punkte D an die Kurve gelegten Tangenten BM, DM mögen sich in M treffen. Dann behaupte ich, daß $BM = t$ ist. Da nämlich nach Satz 37 im I. Buche des Apollonius

$$AG : AB = AB : AT$$

ist und daher

$$AB : TB = AG(z) : BG(x),$$

ferner (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke TBM und CHD)

$$TB : BM = CH(dx) : HD(dy) = a^2 y : x$$

(nach der Differentialgleichung der Kurve), so wird

$$AB(a) : BM = a^2 y : x$$

sein. Daraus erhält man

$$BM = x : ay = x : \sqrt{2ax \pm x^2},$$

also

$$\sqrt{2ax \pm x^2} : x = 1 : BM.$$

Nun hatten wir aber

$$\sqrt{2ax \pm x^2} : x = 1 : t.$$

Also ist $BM = t$. Vgl. Acta Lipsiensia, 1691, S. 179.

Vierter Teil.

(Basel, 1698.)

XLVII.

Wenn eine Zahl gegeben ist, den Logarithmus durch eine Reihe zu finden (Fig. 8).

Man denke sich über der Achse $SA\sigma$ eine gewisse Kurve CBz von solcher Natur, daß die Abszissen AR, AS ($A\varrho$, $A\sigma$) arithmetisch wachsen, während die Ordinaten RE, SC ($\varrho\varepsilon$, σz) geometrisch wachsen oder abnehmen. Diese sollen sich also verhalten wie die Zahlen, jene dagegen wie die Logarithmen. Diese Kurve soll die logarithmische heißen. Sie hat, wie der scharfsinnige *Leibniz* in den Acta Lipsiensia 1684, S. 473, nachweist[35]), die Eigenschaft, daß alle ihre Subtangenten AS, RN, $\varrho\nu$ gleich sind. Man errichte in A die Ordinate AB und

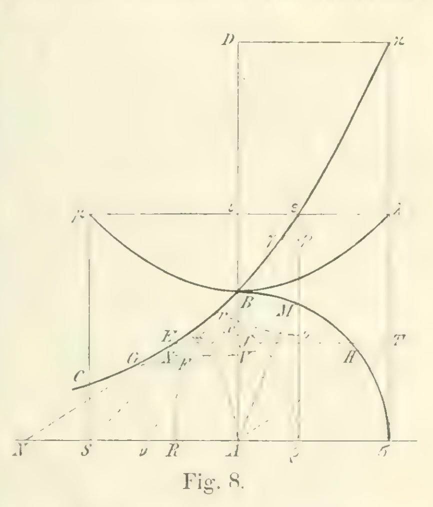


Fig. 8.

ziehe, nachdem man auf der Kurve einen beliebigen Punkt E (ε) gewählt hat, die Gerade EJ ($\varepsilon\iota$) parallel zur Achse SA. Man setze $AB = 1$ und nenne BJ ($B\iota$) x, so daß AJ ($A\iota$) oder RE ($\varrho\varepsilon$) gleich $1 \mp x$ ist. Ferner heiße AR ($A\varrho$) y und die konstante Subtangente der Kurve b. Wenn nun die Zahl RE ($\varrho\varepsilon$) gegeben ist, so findet man ihren Logarithmus AR ($A\varrho$) in folgender Weise. Da nach der allgemeinen Natur der Kurven das Ordinatenelement EF ($\varepsilon\varphi$) oder dx sich zu dem Abszissenelement FG ($\varphi\gamma$) oder dy verhält wie die Ordinate RE ($\varrho\varepsilon$) oder $1 \mp x$ zur Subtangente der Kurve, RN ($\varrho\nu$) oder b, so hat man

$$dy = \frac{b\,dx}{1 \mp x}.$$

Löst man diesen Bruch nach XXXVI und XXXVIII in eine Reihe auf, so ergibt sich

$$dy = b\,dx \mp bx\,dx + bx^2dx \mp bx^3dx + \cdots.$$

Hieraus findet man für y, d. h. AR ($A\varrho$), durch Summation

$$y = bx \mp \frac{1}{2}\,bx^2 + \frac{1}{3}\,bx^3 \mp \frac{1}{4}\,bx^4 + \cdots.$$

In dem speziellen Falle BJ ($B\iota$) $= BA = BD$, d. h. $x = 1$, wird diese Reihe

$$b \mp \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{3}\,b \mp \frac{1}{4}\,b + \cdots.$$

Folgerung 1. Die Identität dieser Reihe mit derjenigen, die wir oben bei Satz XLII zur Quadratur eines hyperbolischen Gebietes gefunden haben, erinnert uns an die gegenseitige Abhängigkeit und Verwandtschaft zwischen der Hyperbel und den Logarithmen und läßt erkennen, daß, wenn man in den beiden Figuren die Strecken BJ ($B\iota$) als gleich annimmt, das hyperbolische Gebiet $CBJO$ ($CB\iota o$) gleich dem Rechteck aus der Einheit AB und dem Logarithmus AR wird. Daraus können wir weiter schließen, daß, wenn man beidemal AB, $A\iota$, AD, d. h. AB, $\varrho\varepsilon$, σz in stetiger Proportion annimmt, in welchem Falle nach der Natur der logarithmischen Kurve $A\sigma$ das Doppelte von $A\varrho$ wird, auch das hyperbolische Gebiet $CBDQ$ das Doppelte von $CB\iota o$ ist, und daher die Gebiete $CB\iota o$ und $o\iota DQ$ gleich sind.

Folgerung 2. Da es evident ist, daß im Falle $BJ = AB$, d. h. bei verschwindendem AJ oder EE, der Logarithmus AR unendlich wird, so folgt, daß auch die harmonische Reihe

$$b + \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{3}\,b + \frac{1}{4}\,b + \cdots,$$

die diesen Logarithmus ausdrückt, jene Beschaffenheit hat. Daraus ergibt sich aufs neue die Richtigkeit des Satzes XVI.

Folgerung 3. Wenn irgend ein Logarithmus, z. B. der von 2, gegeben ist, so kann man aus ihm die Subtangente b der Kurve bestimmen. Wird nämlich $BD = 1 = AB$ gesetzt, also $AD = \sigma z = 2$, so ist, wie wir gezeigt haben, der Logarithmus $A\sigma$ von 2 gleich

$$b - \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{3}\,b - \frac{1}{4}\,b + \cdots = b\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right).$$

Umgekehrt wird also

$$b = \text{Log}\, 2 : \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

sein.

XLVIII.

Wenn der Sinus des Komplements gegeben ist, den Logarithmus des Sinus rectus durch eine Reihe zu finden[36].

In derselben Figur werde um den Mittelpunkt A durch B der Viertelkreis $BH\sigma$ beschrieben, den die verlängerte EJ in H schneide. Dann ist AJ oder BE der Sinus des Bogens $H\sigma$ und AB sein Logarithmus, während offenbar der Logarithmus des Radius AB als der Einheit gleich Null ist. Man setze den Sinus des Komplements $JH = x$, so daß der Sinus rectus AJ oder $BE = \sqrt{1 - x^2}$ wird und sein Element

$$EF = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Nach der allgemeinen Natur der Kurven verhält sich

$EF\left(-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ zu FG, dem Element des Logarithmus AB,

wie

$BE\ \sqrt{1-x^2}$ zur Subtangente BN der logarithmischen Kurve, die gleich 1 sein möge. Es ist also

$$FG = -\frac{x\,dx}{1-x^2} = -x\,dx - x^3\,dx - x^5\,dx - \cdots$$

(nach XXXVI). Daher werden, wenn man summiert, alle FG, d. h. der Logarithmus

$$AB = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{8}x^8 - \cdots.$$

Er ist natürlich negativ, weil der Numerus davon, nämlich BE, kleiner als die Einheit AB ist. Wenn er aber positiv wird,

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{8}x^8 + \cdots.$$

d. h. wenn man AR auf die andere Seite nach $A\varrho$ überträgt, so wird er gerade der Logarithmus der Strecke $\varrho\varepsilon$, d. h. (nach der Natur der Logarithmen) der dritten Proportionalen zu dem Sinus RE und dem Radius AB. Diesen Logarithmus hätte man aber auch unmittelbar finden können aus dem Werte seines Numerus $\varrho\varepsilon = 1 : \sqrt{1 - x^2}$.

Dasselbe macht *Leibniz* in den Acta Lipsiensia 1691, S. 180, in eleganter Weise wie folgt:

$$\text{Log}\,(1 - x) = -y = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots,$$

$$\text{Log}\,(1 + x) = \quad y = \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots.$$

$$\text{Log}\,(1 - x^2) = \text{Log}\,(1 - x) + \text{Log}\,(1 + x) \quad (\text{nach d. Nat. d. Log.})$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots\right).$$

$$\text{Log}\,\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(1 - x^2) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - \cdots.$$

Folgerung. Man setze HJ, den Sinus des Komplements in Fig. 8, gleich BJ oder $B\iota$ in Fig. 4, Nr. LXIV. Dann wird das Rechteck aus AR, dem Logarithmus des Sinus rectus, und dem Radius AB gleich der Hälfte des Überschusses des hyperbolischen Gebiets $CBJO$ über das andere $CB\iota o$. Das geht aus Folgerung 1 in Nr. XLII hervor, wo $CBJO - CB\iota o$ durch das Doppelte der vorliegenden Reihe ausgedrückt steht. Übrigens hätte man dort bemerken können, daß, wenn man z als dritte Proportionale zu 1 und x wählt, also $z = x^2$ setzt, jene Reihe sich in folgende andere verwandelt

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \cdots,$$

durch die auch der hyperbolische Raum $CBGM$, wobei $BG = z$ oder x^2 ist, dargestellt wird. Daraus geht nämlich hervor, daß

$$CBJO - CB\iota o = CBGM$$

ist und

$$CBJO - CBGM \text{ oder } MGJO = CB\iota o.$$

also auch (da unter diesen Bedingungen $AJ(1-x)$ sich zu $AG(1-x^2)$ verhält wie $AB(1)$ zu $Al(1+x)$), daß, falls man AJ, AG, AB, Al irgendwie als Proportionalen wählt, die über den Abschnitten JG, Bl stehenden Räume immer gleich sind.

XLIX.

Die Ordinate der Kettenlinie durch eine Reihe darzustellen. $\mu B\lambda$ Fig. 8 sei die Kurve, die eine an ihren beiden Enden frei aufgehängte Kette durch ihr eigenes Gewicht bildet, also die sogenannte Kettenlinie. Ihr Mittelpunkt sei A, ihr Scheitel B, ihre Achse ABD, ihr Parameter $AB = 1$. Die Abszisse Al sei z, die Ordinate $l\lambda$ oder $l\mu$ gleich y. Nach dem, was in den Acta Lipsiensia, 1691, S. 274, über diese Kurve gedruckt zu lesen ist[37], steht fest, daß das Element dy der Ordinate gleich

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

ist. Um hier die Irrationalität zu beseitigen, setze ich

$$\sqrt{z^2-1} = t - z.$$

Dann wird

$$z = \frac{t^2+1}{2t}, \qquad dz = \frac{(t^2-1)\,dt}{2t^2},$$

$$\sqrt{z^2-1} = t - z = \frac{t^2-1}{2t}$$

und schließlich

$$dy = \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{dt}{t}.$$

Um nun diesen Bruch in eine Reihe zu verwandeln, mache ich den Nenner zweigliedrig, indem ich $1+x$ statt t setze und dx statt dt. Dann wird

$$dy = \frac{dt}{t} = \frac{dx}{1+x} = dx - x\,dx + x^2dx - x^3dx + \cdots$$

(nach XXXVII), mithin alle dy, d. h. y gleich

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots.$$

Da aber

$$z = \frac{t^2 + 1}{2t}, \text{ d. h. } t^2 = 2zt - 1$$

und

$$t = 1 + x = z + \sqrt{z^2 - 1}\,,$$

so ergibt sich

$$x = z - 1 + \sqrt{z^2 - 1} = B\iota + \iota D = BD,$$

wenn man $\iota D = \sqrt{z^2 - 1}$ macht. Wenn also $A\iota$ oder z gegeben ist, so wird BD oder x und dann $\iota\lambda$ oder y, durch eine Reihe, gegeben sein.

Folgerung. Vergleicht man die gefundene Reihe mit der in Satz XLVII, so ist klar, daß y der Logarithmus der Zahl x ist. Wenn also eine logarithmische Kurve zBC gegeben ist, deren Subtangente gleich $AB = 1$ ist, so kann man leicht die Punkte der Kettenlinie finden. Da nämlich z, d. h. $A\iota$ oder $\sigma\lambda$ $(S\mu)$ gleich

$$\frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

ist, so muß offenbar, wenn man nach beiden Seiten gleiche Logarithmen $A\sigma$ AS aufträgt, die Ordinate $\sigma\lambda$ $(S\mu)$ der Kettenlinie gleich der Hälfte der Summe zweier Ordinaten σz und SC der logarithmischen Kurve sein, die gleich weit von AB abstehen. Die eine von ihnen ist $AD = t$, die andere nach der Natur der logarithmischen Kurve gleich $1 : t$. Gerade hierin besteht die äußerst elegante *Leibniz*sche Konstruktion dieser Kurve, die man in den Acta Lipsiensia, 1691, S. 277, nachsehen kann.

L.

Wenn die Breite eines Ortes auf einer Loxodrome gegeben ist und ihr Kurswinkel gegen den Meridian, die Länge des Ortes durch eine Reihe darzustellen. (Fig. 9.)

Als Kurslinie oder Loxodrome bezeichnen die Seeleute die Kurve, die ein beständig in derselben Windrichtung fahrendes Schiff auf der Oberfläche der Erd-Wasser-Kugel beschreibt. Es ist das also die Kurve, die alle Meridiane unter demselben schiefen Winkel schneidet. Sie fängt beim Äquator an, geht von dort schief auf einen oder den andern

Pol zu und endigt schließlich in dem Pol selbst, den sie in unendlich vielen Windungen umkreist. Es sei in Fig. 9 der Sinus totus, der zugleich der Radius des Äquators ist, $AC = 1$. BCD sei ein Meridian, B und D seien die Pole. Der Tangens des Kurswinkels sei t. H sei ein Punkt auf der Loxodrome, seine Breite HC, der Sinus der Breite AE und der Sinus des Komplements, der z heiße, HE. Die Länge aber, d. h. der Äquatorbogen

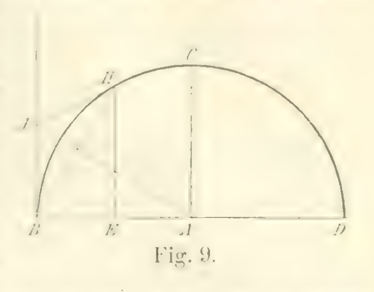


Fig. 9.

zwischen dem Meridian des Ortes H und dem Anfang der Loxodrome möge mit x bezeichnet werden. Dies festgesetzt, findet man nach den Ausführungen[38] in den Acta Lipsiensia von 1691, S. 284, als Element der Länge

$$dx = -\frac{t\,dz}{z\sqrt{1-z^2}}.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, setze ich zunächst $z = 1 : p$, so daß

$$dz = -dp : p^2, \quad dz : z = -dp : p, \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{p^2-1} : p$$

wird und schließlich

$$dx = -\frac{t\,dz}{z\sqrt{1-z^2}} = \frac{t\,dp}{\sqrt{p^2-1}}.$$

Dann erinnere ich mich, daß von derselben Form vorhin das Ordinatenelement der Kettenlinie war, und setze ähnlich wie dort

$$\sqrt{p^2-1} = p - q.$$

Daraus finde ich

$$dx = \frac{t\,dp}{\sqrt{p^2-1}} = -\frac{t\,dq}{q},$$

und wenn ich weiter $q = 1 - r$ annehme, erhalte ich endlich

$$dx = -\frac{t\,dq}{q} = \frac{t\,dr}{1-r}.$$

Diesen Ausdruck hätten wir übrigens direkt aus

$$-tdz : z\sqrt{1-z^2}$$

gewinnen können, wenn wir sogleich gesetzt hätten

$$z = \frac{2-2r}{2-2r+r^2}.$$

Aber auf solche Substitutionen zu kommen, ist oft schwer, wenn man es nicht schon durch Übung weiß, welche Formeln ineinander transformierbar sind. Man bemerke, daß

$$r = AC - BJ$$

ist, d. h. gleich dem Überschuß des Radius über die Tangente des halben Komplements der Breite des Punktes H. Setzt man nämlich

$$BJ = 1 - r$$

und zieht die Gerade BH, so wird wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke HEB, ABJ

$$HE\ (z)\ \text{zu}\ EB\ (1-\sqrt{1-z^2})$$

sich verhalten wie

$$AB\ (1)\ \text{zu}\ BJ\ (1-r).$$

Daraus ergibt sich

$$z = \frac{2-2r}{2-2r+r^2},$$

wie es sein muß.

Wenn man aber nach XXXVI die Größe $tdr : (1-r)$ in eine Reihe verwandelt, so erhält man

$$dx = tdr + trdr + tr^2dr + tr^3dr + \cdots$$

und daraus durch Summation

$$x = tr + \frac{1}{2}tr^2 + \frac{1}{3}tr^3 + \frac{1}{4}tr^4 + \cdots.$$

Hiernach ist klar, wie man aus der gegebenen Tangente des halben Komplements der Breite die Länge findet.

Man muß aber wissen, daß das Element der Länge

$$-\frac{tdz}{z\sqrt{1-z^2}}$$

sich noch auf andere Weise vereinfachen läßt, nämlich indem man setzt

$$\sqrt{1-z^2}=y.$$

Dann wird

$$z=\sqrt{1-y^2},\quad dz=-\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

und

$$dx=-\frac{t\,dz}{z\sqrt{1-z^2}}=\frac{t\,dy}{1-y^2}$$

$$=t\,dy+ty^2dy+ty^4dy+ty^6dy+\cdots$$

nach XXXVI und endlich alle dx, d. h. x, gleich

$$ty+\frac{1}{3}ty^3+\frac{1}{5}ty^5+\frac{1}{7}ty^7+\cdots.$$

Dabei ist klar, daß $y=\sqrt{1-z^2}=AE$, also gleich dem Sinus des Bogens HC ist. Danach weiß man, wie das Gesuchte sich auch aus dem Sinus rectus der Breite bestimmen läßt, wie es *Leibniz* in den Acta Lipsiensia von 1691, S. 181 gemacht hat. Hätte ich bei der Rechnung, durch die ich zu der anfangs erwähnten Gleichung

$$dx=-\frac{t\,dz}{z\sqrt{1-z^2}}$$

gelangte, als unbestimmte Größe den Sinus rectus AE statt den Sinus des Komplements HE gewählt, so wäre ich offenbar gleich zu der andern Gleichung

$$dx=\frac{t\,dy}{1-y^2}$$

gelangt, die sich direkt in eine Reihe verwandeln läßt. Wir können übrigens daraus, daß die beiden gefundenen Reihen dieselbe Größe x bedeuten, beiläufig folgendes schließen. Wird bei einem Kreise der Sinus irgend eines Bogens AE mit y bezeichnet und $AC-BJ$, d. h. der Überschuß des Radius über die Tangente des halben Komplements, mit r, so ist immer

$$y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+\cdots=r+\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{3}r^3+\cdots.$$

Wir bemerken auch, wenn der Ort H im Pol selbst liegt, in welchem Falle $s = 1 = y$ ist, daß dann

$$x = t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t + \cdots$$

oder

$$x = t + \frac{1}{3} t + \frac{1}{5} t + \cdots$$

wird. Da die Summen dieser Reihen nach XVI unendlich sind, so lehren sie uns, daß auch die Länge des Ortes H unendlich ist, daß also, wie ich schon sagte, die Loxodrome in unendlich vielen Windungen um den Pol herumgeht, bevor sie ihn erreicht.

Folgerung 1. Wenn auf derselben Loxodrome außer dem Ort H noch ein anderer Ort mit bekannter Breite liegt, deren Sinus rectus gleich r ist, während der Überschuß des Radius über die Tangente ihres halben Komplements den Wert s hat, dann wird ebenso wie vorhin die Länge des Ortes gleich

$$t\left(r + \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{5} r^5 + \cdots\right)$$

oder gleich

$$t\left(s + \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{3} s^3 + \cdots\right)$$

sein. Und daher wird der Längenunterschied der beiden Örter die Differenz der beiden Reihen sein, d. h.

$$t\left\{y \sim r + \frac{1}{3}(y^3 \sim r^3) + \frac{1}{5}(y^5 \sim r^5) + \cdots\right\}$$

oder

$$t\left\{r \sim s + \frac{1}{2}(r^2 \sim s^2) + \frac{1}{3}(r^3 \sim s^3) + \cdots\right\}.$$

Wenn man sich also auf einer andern Loxodrome zwei Örter denkt, die dieselben Breiten wie die früheren haben, so daß y und r oder r und s dieselben bleiben, dann verhalten sich die Längenunterschiede wie die Tangenten der Winkel, die die Loxodromen mit den Meridianen bilden. Siehe Acta Lipsiensia, 1691, S. 182 u. 285.

Folgerung 2. Aus der Vergleichung dieser Reihen mit den Reihen im Satz XLII, XLVI und XLVII erhellt die Be-

ziehung des Problems zur Quadratur der Hyperbel und zu den Logarithmen. Wir bemerken insbesondere, daß, wenn die Subtangente der logarithmischen Kurve gleich t ist, die gesuchte Länge des Punktes H gerade der Logarithmus der Strecke $1 - x$, d. h. BJ, wird. Das geht aus XLVII hervor. Ebenso wird sie aber auch (wie bei *Leibniz* a. a. O.) gleich dem halben Logarithmus der Größe $(1 + y) : (1 - y)$, d. h. $DE : EB$, was man so zeigt:

$$\text{Log}\,(1 + y) = ty - \frac{1}{2}\,ty^2 + \frac{1}{3}\,ty^3 - \frac{1}{4}\,ty^4 + \frac{1}{5}\,ty^5 - \cdots$$

$$\text{Log}\,(1 - y) = -ty - \frac{1}{2}\,ty^2 - \frac{1}{3}\,ty^3 - \frac{1}{4}\,ty^4 - \frac{1}{5}\,ty^5 - \cdots.$$

$$\text{Log}\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) = \text{Log}\,(1 + y) - \text{Log}\,(1 - y)$$
$$= 2\left(ty + \frac{1}{3}\,ty^3 + \frac{1}{5}\,ty^5 + \cdots\right).$$

Folgerung 3. Wenn die Länge und Breite des Ortes gegeben ist, so ist der Winkel der Loxodrome mit dem Meridian bestimmt. Da nämlich

$$x = t\left(r + \frac{1}{2}\,r^2 + \frac{1}{3}\,r^3 + \cdots\right) = t\left(y + \frac{1}{3}\,y^3 + \frac{1}{5}\,y^5 + \cdots\right),$$

so wird

$$t : 1 = x : \left(r + \frac{1}{2}\,r^2 + \frac{1}{3}\,r^3 + \cdots\right)$$

oder

$$t : 1 = x : \left(y + \frac{1}{3}\,y^3 + \frac{1}{5}\,y^5 + \cdots\right).$$

D. h. die Tangente des gesuchten Winkels verhält sich zum Sinus totus wie der Längenbogen zu dem Logarithmus von BJ oder dem halben Logarithmus von $DE : EB$ und nach Folgerung 1 auch wie die Differenz zweier Längen zu der Differenz der Logarithmen zweier BJ oder der halben Differenz der Logarithmen zweier $DE : EB$. Hierbei muß man beachten, daß die Logarithmen sich auf eine Kurve beziehen, deren Subtangente gleich dem Radius, d. h. gleich 1 ist. Man bemerke noch folgendes. Wenn der Winkel einer Loxodrome gewünscht wird, die erst nach einer oder nach mehreren ganzen

Umdrehungen nach dem gegebenen Orte führt, so muß man den Bogen des Längenunterschieds um die ganze Peripherie des Äquators oder um ein Vielfaches von ihr vermehren.

Bemerkung. Aus dem bisher Gesagten ergibt sich ein bequemes Verfahren zur Herstellung einer Art loxodromischer Skala. Es sei in Fig. 8 $BM\sigma$ ein Bogen des Äquators in Grade und Minuten geteilt. Man mache ihn zu einer geraden Strecke auf der Achse AS der logarithmischen Kurve CBz und schreibe an die Teilpunkte von A aus die Längengrade heran. Dann nehme man auf diesem Bogen unbestimmt einen Punkt M an und halbiere den Bogen $M\sigma$ durch die Gerade AT, die der σz in T begegnet. Von T aus ziehe man die Gerade TE parallel zur Achse AS; sie treffe die logarithmische Kurve in E. Schließlich fälle man von E auf die Achse das Lot ER und schreibe an den Punkt R die Anzahl der Grade auf dem Bogen BM heran. Dann hat man auch die Breitengrade, und es ist auf diese Weise eine loxodromische Skala hergestellt, die in erster Linie der Loxodrome dient, deren Winkel eine Tangente gleich der Subtangente der logarithmischen Kurve hat. Denn neben der Gradzahl irgend einer gegebenen Breite steht in der Skala sofort die Gradzahl der zugehörigen Länge. Dieselbe Skala kann aber auch für jede beliebige Loxodrome von Nutzen sein. Denn nach Folgerung 1 verhält sich die Subtangente der logarithmischen Kurve, mit deren Hilfe die Skala konstruiert ist, zur Tangente des Kurswinkels, wie die mittels der Skala gefundene Länge oder Längendifferenz zu der gesuchten Länge oder Längendifferenz. Eine derartige Skala, die zum Gebrauch der Seeleute auf einem Proportionenzirkel eingraviert ist neben einer in gleiche Teile geteilten Linie, die die Längengrade darstellen, wäre vielleicht von allen Instrumenten, die die Seeleute bis jetzt gehandhabt haben, am wenigsten umfangreich und am nützlichsten[39]. Aber dies mag hier genügen.

Zur Beachtung.

Bevor wir fortfahren, kann der Leser uns vorhalten, daß wir bis jetzt bei der Summation der Differentiale für jedes Element immer sein reines oder absolutes Integral eingesetzt haben, wie z. B. x für dx, $\frac{1}{2}x^2$ für xdx usw. Wir wollen ihn aber wissen lassen, daß dies keineswegs so weiter geht.

Obwohl nämlich eine unbestimmte Größe x nur ein Differential dx hat, so hat doch dasselbe Differential dx unendlich viele Integrale. Eins davon ist das reine Integral x, die übrigen sind mit einer Beimischung konstanter Größen behaftet, $x+a$, $x-b$ usw., und bei dem Summationsgeschäft muß man je nach den Umständen bald dieses, bald jenes von ihnen wählen. Man darf nicht ohne Gefahr des Irrtums unterschiedslos immer das reine Integral annehmen. Um daher die Klippe zu vermeiden, die, wie ich sehe, allen gemeinsam ist, die diese Rechnungsart unvorsichtig behandeln, wollen wir noch bei dem einen oder andern Problem ein Beispiel davon vorlegen. Bei deren Lösung wird dann der Leser sehen können, woher und durch welche Kriterien man erkennt, was man für irgend ein Element bei der Summation einzusetzen hat.

LI.

Die Länge der parabolischen Kurve durch eine Reihe darzustellen (Fig. 10). Nehmen wir an, daß BCD eine Parabel sei, deren Scheitel B, deren Achse BG, deren

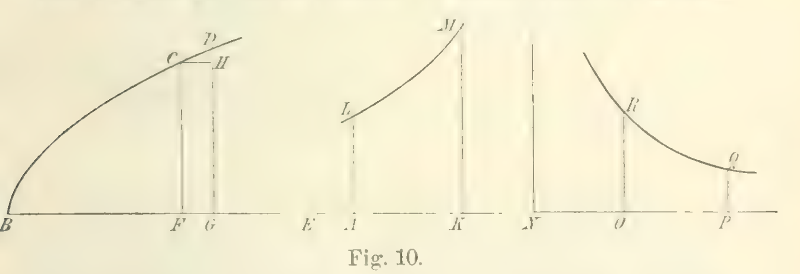


Fig. 10.

Parameter a, deren Abszisse $BG = x$, und deren Ordinate $GD = y$ ist. Die Kurve BCD selbst sei gleich s. Dann ist das Element FG oder $CH = dx$, $DH = dy$ und $CD (\sqrt{dx^2 + dy^2}) = ds$. Nach der Natur der Kurve wird

$$ax = y^2$$

sein. Hieraus folgt durch Differentiation

$$adx = 2ydy$$

und, wenn man quadriert,

$$a^2dx^2 = a^2(ds^2 - dy^2) = 4y^2dy^2$$

oder durch Herüberschaffen

$$a^2 ds^2 = a^2 dy^2 + 4y^2 dy^2$$

und endlich nach Ausziehung der Wurzel

$$a ds = dy \sqrt{a^2 + 4y^2}.$$

Das ist die Größe, um deren Summation es sich handelt. Um zunächst die Irrationalität zu beseitigen, setze ich

$$\sqrt{a^2 + 4y^2} = z - 2y.$$

Dann wird

$$a^2 = z^2 - 4zy$$

und

$$y = \frac{z^2 - a^2}{4z};$$

mithin

$$dy = \frac{(z^2 + a^2) dz}{4z^2}$$

und

$$\sqrt{a^2 + 4y^2} = z - 2y = \frac{z^2 + a^2}{2z},$$

also

$$a ds = dy \sqrt{a^2 + 4y^2} = \frac{(z^4 + 2a^2 z^2 + a^4) dz}{8z^3}$$

$$= \frac{1}{8} z dz + \frac{1}{4} a^2 \frac{dz}{z} + \frac{1}{8} a^4 \frac{dz}{z^3}.$$

Nach den Summen dieser Ausdrücke müssen wir uns jetzt umsehen. Zu diesem Zweck beachte ich die Beziehung, die der hier eingeführte unbestimmte Buchstabe z zu den Ordinaten unserer Kurve hat. Wegen der Annahme

$$\sqrt{a^2 + 4y^2} = z - 2y$$

erkenne ich, daß er folgende Beschaffenheit hat. Wenn $y = 0$ wird, so verschwindet nicht zugleich z, sondern es wird gleich a. Ferner sehe ich, daß bei wachsendem y um so mehr auch z wächst. Man denke sich daher z auf der Geraden EK vom Punkte E aus aufgetragen, und es sei das erste z, das dem eben entstehenden y entspricht, $EA = a$, das letzte z, das dem letzten y oder der Ordinate GD entspricht, EK.

Nun stelle man sich ein veränderliches Lot AL oder KM vor, das von A nach K wandert und überall gleich $\frac{1}{16}z^2$ ist (d. h. gleich dem absoluten Integral von $\frac{1}{8}z\,dz$). Am kleinsten ist es also in A, nämlich gleich $\frac{1}{16}a^2$. Das Inkrement dieses wandernden Lotes wird gleich $\frac{1}{8}z\,dz$, und alle Inkremente, die es annimmt, während es sich von A nach K bewegt, werden alle $\frac{1}{8}z\,dz$ darstellen, die den Ordinaten y von der kleinsten (0) bis zur letzten (GD) der Reihe nach entsprechen, d. h. sich auf den zu rektifizierenden Parabelbogen BD beziehen. Es bilden also jene Inkremente offenbar nicht das ganze KM $\left(\frac{1}{16}z^2\right)$, sondern nur seinen Überschuß über die Gerade AL $\left(\frac{1}{16}a^2\right)$, d. h. die Differenz $KM - AL$ oder $\frac{1}{16}(z^2 - a^2)$. Das Integral des ersten Gliedes, welches hier in Betracht kommt, ist demnach

$$\frac{1}{16}(z^2 - a^2).$$

Ebenso denke ich mir, um das dritte Glied $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$ zu integrieren, z auf der Geraden NP vom Punkte N aus aufgetragen, und es sei das erste z, das dem eben entstehenden y entspricht, $NO = a$, und das z, das dem letzten y entspricht, NP. Nun stelle man sich die Größe $\frac{1}{16}a^4:z^2$, d. h. das reine Integral von $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$, etwa das Lot OR oder PQ, von O nach P wandernd vor. Sie wird dann am größten in O sein, nämlich gleich $\frac{1}{16}a^2$ und nach P zu abnehmen. Die Dekremente, die das Lot OR erfährt, bis es nach PQ gelangt, werden alle Elemente $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$ bezeichnen, die dem Parabelbogen BD entsprechen. Aber alle jene

Dekremente machen offenbar nicht die ganze Strecke PQ oder $\frac{1}{16}a^4:z^2$ aus, sondern nur die Differenz $OR - PQ$ oder $\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^4:z^2$. Daher ist das hier in Betracht kommende Integral des dritten Gliedes $\frac{1}{8}a^4dz:z^3$

$$\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{16}\frac{a^4}{z^2},$$

und die Summe des ersten und dritten

$$\int \frac{1}{8}z\,dz + \int \frac{1}{8}\frac{a^4dz}{z^3} = \frac{1}{16}(z^2 - a^2) + \frac{1}{16}\left(a^2 - \frac{a^4}{z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\frac{z^4 - a^4}{z^2}.$$

Es bleibt noch das zweite Glied zu erledigen übrig: $\frac{1}{4}a^2dz:z$. Da es sich nicht absolut summieren läßt, verwandle ich es in eine Reihe, indem ich vorher $z = a + t$ setze, damit der Nenner zweigliedrig wird. Dann ergibt sich nämlich

$$\frac{1}{4}a^2\frac{dz}{z} = \frac{1}{4}a^2\frac{dt}{a+t}$$

$$= \frac{1}{4}a\,dt - \frac{1}{4}t\,dt + \frac{1}{4}\frac{t^2dt}{a} - \frac{1}{4}\frac{t^3dt}{a^2} + \cdots$$

nach XXXVII, und, wenn man die Summation vornimmt:

$$\int \frac{1}{4}a^2\frac{dz}{z} = \frac{1}{4}\left(at - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}\frac{t^3}{a} - \frac{1}{4}\frac{t^4}{a^2} + \cdots\right).$$

Man beachte, daß ich hier jedes Glied der Reihe durch sein absolutes Integral ersetze, weil ich aus der Gleichung $z = a + t$ entnehme, daß für $z = a$ d. h. $y = 0$) auch t gleich Null wird, ebenso alle die fließenden Größen

$$\frac{at}{4\cdot 1},\quad \frac{t^2}{4\cdot 2},\quad \frac{t^3}{4\cdot 3a},\quad \ldots,$$

d. h. daß diese von 0 zu fließen oder Inkremente zu nehmen anfangen. Daraus geht nämlich klar hervor, daß alle ihre Inkremente, also alle

$$\frac{1}{4}\,a\,dt,\quad \frac{1}{4}\,t\,dt,\quad \frac{1}{4}\,\frac{t^2 dt}{a},\ \cdots$$

den letzten Größen $\frac{1}{4}\,a\,t$, $\frac{1}{8}\,t^2$, $\frac{1}{12}\,\frac{t^3}{a}$, $\cdots$ gleich sein werden. Dasselbe ist, wenn man es prüft, bei allen Beispielen in den vorigen Nummern der Fall. Daraus ist zu schließen, daß wird dort mit Recht beim Summieren immer die reinen Integrale angenommen haben, wenn wir auch die Begründung dafür nicht ausführlich beigebracht haben. Aber wir wollen zu unserm Gegenstand zurückkehren. Wenn die gefundene Summe des mittleren Gliedes $\frac{1}{4}\,a^2 d z : z$ zu der oben erhaltenen Summe hinzugefügt wird, so ergibt sich die Summe aller

$$\int \frac{1}{8}\,z\,dz + \int \frac{1}{4}\,a^2\,\frac{dz}{z} + \int \frac{1}{8}\,a^4\,\frac{dz}{z^3}\,.$$

d. h. es ergibt sich

$$a s = \frac{1}{16}\,\frac{z^4 - a^4}{z^2} + \frac{1}{4}\left(a t - \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{3}\,\frac{t^3}{a} - \frac{1}{4}\,\frac{t^4}{a^2} + \cdots\right).$$

Dividiert man durch a, so wird die Länge der Kurve s oder BD gleich

$$\frac{1}{16}\,\frac{z^4 - a^4}{a z^2} + \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{a} + \frac{1}{3}\,\frac{t^3}{a} - \frac{1}{4}\,\frac{t^4}{a^3} + \cdots\right).$$

Setzt man endlich

$$a = t = 4 \quad \text{und} \quad z = a + t = 8\,,$$

so wird sie gleich

$$\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Da in diesem Falle

$$y = \frac{1}{4}\,\frac{z^2 - a^2}{z} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{y^2}{a} = \frac{9}{16}$$

ist, so folgt, daß bei einer Parabel mit dem Parameter 4, wenn die Abszisse $BG = \frac{9}{16}$ und die Ordinate $GD = \frac{3}{2}$ ist, der Parabelbogen BD die Länge $\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ hat.

Folgerung. Vergleicht man die Reihe mit der in Satz XLII, so lernt man eine Beziehung zwischen der Parabel und dem hyperbolischen Raum zwischen den Asymptoten kennen. Es genügt, darauf hingewiesen zu haben.

LII.

Die logarithmische Kurve durch eine Reihe und anders zu rektifizieren. (Fig. 8).

Über der Achse $SA\sigma$ stehe die logarithmische Kurve CBz. Die Ordinate AB sei gleich 1, eine beliebige andere Ordinate RE ($\varrho\varepsilon$) gleich z und ihr Element EF ($\varepsilon\varphi$) gleich dz. Gesucht wird die Rektifikation des Kurvenstücks BE ($B\varepsilon$). Da nach XLVII das Element der Abszisse AR ($A\varrho$), also FG ($\varphi\gamma$), gleich $bdz:z$ ist, so wird

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = dz^2 + \frac{b^2 dz^2}{z^2} = \frac{(z^2 + b^2)\,dz^2}{z^2},$$

mithin das Kurvenelement EG ($\varepsilon\gamma$) gleich

$$\frac{dz\sqrt{z^2 + b^2}}{z}$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner mit $\sqrt{z^2 + b^2}$ multipliziert,

$$\frac{(z^2 + b^2)\,dz}{z\sqrt{z^2 + b^2}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \frac{b^2\,dz}{z\sqrt{z^2 + b^2}}.$$

Es handelt sich hier um die Summation dieser Größen. Das reine Integral des ersten Gliedes ist

$$\sqrt{z^2 + b^2}.$$

Weil $z = AB = 1$ das erste z ist, so muß man sich denken, daß $\sqrt{z^2 + b^2}$ von $\sqrt{1 + b^2}$ bis zu $\sqrt{z^2 + b^2}$ abnimmt (wächst), so daß also alle seine Dekremente (Inkremente), soweit sie hier in Betracht kommen, die Summe

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 + b^2}} = \sqrt{1 + b^2} - \sqrt{z^2 + b^2} \quad \left(\sqrt{z^2 + b^2} - \sqrt{1 + b^2}\right)$$

haben, die gleich der Differenz der Tangenten BK und EN ($\varepsilon\nu$) in B und E (ε) ist. Das Integral des zweiten Gliedes

$$\frac{b^2 dz}{z\sqrt{z^2 + b^2}}$$

ist nicht so einfach zu finden. Ich versuche es daher nach vorheriger Reduktion zu ermitteln, und zwar nehme ich eine ähnliche Reduktion vor wie in Satz L bei der loxodromischen Kurve, weil ich bei den Elementen eine gewisse Ähnlichkeit bemerke. Ich setze also zunächt $z = b^2 : p$ und transformiere dadurch

$$\frac{b^2 dz}{z\sqrt{z^2 + b^2}} \quad \text{in} \quad - \frac{b\, dp}{\sqrt{b^2 + p^2}}.$$

Darauf setze ich

$$\sqrt{b^2 + p^2} = p + q$$

oder

$$p = \frac{b^2 - q^2}{2q}$$

und erhalte daraus

$$\frac{b^2 dz}{z\sqrt{z^2 + b^2}} = - \frac{b\, dp}{\sqrt{b^2 + p^2}} = \frac{b\, dq}{q}.$$

Darin erkenne ich aber nach XLVII das Element einer gewissen Abszisse bei der logarithmischen Kurve. Diese Abszisse bestimme ich schließlich so. Da

$$p = \frac{b^2 - q^2}{2q} \quad \text{und} \quad z = \frac{b^2}{p}$$

ist, so wird

$$z = \frac{2b^2 q}{b^2 - q^2},$$

also umgekehrt

$$q = \frac{- b^2 + b\sqrt{z^2 + b^2}}{z},$$

und da das erste z $AB = 1$ ist, so ist das zugehörige erste q gleich

$$- b^2 + b\sqrt{1 + b^2}.$$

Zur Konstruktion schneide ich auf der Tangente BK ein Stück $K\alpha = KA$ ab, auf der Ordinate ein Stück $BV = B\alpha$, und durch V ziehe ich VX parallel zu AK. Ebenso nehme ich auf der Tangente $\nu\varepsilon$ dasselbe denke man sich bei NE

gemacht $\nu r = \nu \varrho$, mache dann $\varepsilon r = \varepsilon r$ und ziehe r parallel zu $\nu \varrho$. Dann wird sicher

$$VX = \text{dem ersten } q = -b^2 - b\sqrt{1+b^2}$$

und

$$rx = \text{dem letzten } q = \frac{-b^2 + b\sqrt{z^2+b^2}}{z}.$$

Wenn man also VX und rx beide oder anstatt ihrer nur die vierte Proportionale zu VX, rx und AB die SC oder σz sei) als Ordinate an die logarithmische Kurve anlegt, so liegt zwischen den Ordinaten VX und rx ein Achsenabschnitt oder auch zwischen AB und SC (σz) ein Abschnitt AS ($A\sigma$) {nach der Natur der Kurve ebenso groß wie der andere}, der gleich

$$\int \frac{b\,dq}{q}$$

ist, d. h. gleich allen $b\,dq : q$ oder allen $b^2 dz : z\sqrt{b^2+z^2}$, die zur Rektifikation des Kurvenstückes BE ($B\varepsilon$) dienen. Setzt man die Differenz zwischen AB und SC (σz) $= x$, so wird der Achsenabschnitt

$$AS(A\sigma) = bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \cdots$$

(nach XLVII). Damit ist die Summe dieses zweiten zu integrierenden Gliedes $b^2 dz : z\sqrt{z^2+b^2}$ auch durch eine Reihe gefunden. Addiert man die Summe beider Glieder, so werden alle EG ($\varepsilon\gamma$), d. h. die Länge der Kurve BE ($B\varepsilon$), gleich

$$\sqrt{1+b^2} \sim \sqrt{z^2+b^2} + bx \pm \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}bx^3 \pm \frac{1}{4}bx^4 + \cdots,$$

d. h. gleich der Differenz der Tangenten BK und EN ($\varepsilon\nu$) zusammen mit dem Achsenabschnitt AS ($A\sigma$).

Fünfter Teil.

Basel, 1704.

Da nicht alle surdischen, geschweige denn alle transzendenten Größen, die mit Differentialen vermischt sind, in der obigen Weise in rationale transformiert werden können, so

müssen wir manchmal zu andern Kunstgriffen unsere Zuflucht nehmen, wenn wir unser Ziel erreichen wollen. Unter diesen nehmen wegen ihrer Allgemeinheit einen hervorragenden Platz ein die Interpolationen von *Wallis* oder die Erhebung eines Binoms zu einer unbestimmten Potenz oder die Annahme einer fingierten Reihe für die gesuchte oder andere Hilfsmittel, von denen, je nach den Umständen bald eins, bald mehrere von Nutzen sein können. Wir werden ein paar Proben davon an dem einen oder andern Beispiel und nachher einiges Allgemeine beibringen.

LIII.

Eine surdische oder irrationale Größe in eine unendliche Reihe rationaler zu verwandeln, mittels der Wallisschen Interpolationen.

Man reduziere die rationale Größe, von der eine gebrochene Potenz, d. h. eine Wurzel oder Basis gesucht wird, auf einen Bruch von der Form $l : (m - n)$, wobei man $m > n$ annimmt. Dann verwandle man die ganzen Potenzen dieses Bruches, die erste, die zweite, die dritte usw. mittels fortgesetzter Division in ebensoviele unendliche Reihen, nach den Sätzen XXXVI bis XL, in folgender Weise:

Exponent	Potenz
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$
1	$\dfrac{l}{m-n} = \dfrac{l}{m} + \dfrac{ln}{m^2} + \dfrac{ln^2}{m^3} + \dfrac{ln^3}{m^4} + \cdots;$
2	$\dfrac{l^2}{(m-n)^2} = \dfrac{l^2}{m^2} + \dfrac{2l^2n}{m^3} + \dfrac{3l^2n^2}{m^4} + \dfrac{4l^2n^3}{m^5} + \cdots;$
3	$\dfrac{l^3}{(m-n)^3} = \dfrac{l^3}{m^3} + \dfrac{3l^3n}{m^4} + \dfrac{6l^3n^2}{m^5} + \dfrac{10l^3n^3}{m^6} + \cdots,$
4	$\dfrac{l^4}{(m-n)^4} = \dfrac{l^4}{m^4} + \dfrac{4l^4n}{m^5} + \dfrac{10l^4n^2}{m^6} + \dfrac{20l^4n^3}{m^7} + \cdots,$
. .	. . . .

Bei diesen Reihen wird man bemerken, daß die Koeffizienten der ersten Glieder gleich 1 sind, die Koeffizienten der zweiten die natürlichen Zahlen, die der dritten die Dreieckszahlen, die der vierten die Pyramidalzahlen usw.[40] Die Glieder selbst

entstehen, indem man den Bruch $l : m$, der zu derselben Potenz erhoben ist, zu der der Bruch $l : (m - n)$ erhoben werden soll, mit 1, $n : m$, $n^2 : m^2$, $n^3 : m^3$, ... multipliziert.

Um daher die Zwischenpotenzen oder die Wurzeln zu finden, (wie z. B. gewisse geometrische Mittel, deren Exponenten arithmetische Mittel zwischen den ganzen Exponenten sind), muß man die figurierten Zahlen der Glieder interpolieren nach der *Wallis*schen Lehre in Satz 172 ff. der »Arithmetik des Unendlichen«. Es ist aber, wenn man den Exponenten oder Index der Potenz p nennt, das allgemeine Symbol der natürlichen Zahlen p, das der Dreieckszahlen $\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}$, das der Pyramidalzahlen $\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, wie daselbst in Satz 182 gelehrt wird. Wenn man nun p die Bedeutung $\frac{1}{2}$ beilegt, so findet man die $\frac{1}{2}$te Potenz der Größe $l : (m - n)$, und zwar wird

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}} = \sqrt{\frac{l}{m}}\left(1 + \frac{1n}{2m} + \frac{1\cdot 3n^2}{2\cdot 4m^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5n^3}{2\cdot 4\cdot 6m^3} + \cdots\right).$$

Wenn man unter p als $\frac{1}{3}$ deutet, so erhält man die $\frac{1}{3}$te Potenz, nämlich

$$\sqrt[3]{\frac{l}{m-n}} = \sqrt[3]{\frac{l}{m}}\left(1 + \frac{1n}{3m} + \frac{1\cdot 4n^2}{3\cdot 6m^2} + \frac{1\cdot 4\cdot 7n^3}{3\cdot 6\cdot 9m^3} + \cdots\right).$$

Deutet man es als $\frac{3}{2}$, so gewinnt man die $\frac{3}{2}$te Potenz oder

$$\frac{l}{m-n}\sqrt{\frac{l}{m-n}} = \frac{l}{m}\sqrt{\frac{l}{m}}\left(1 + \frac{3n}{2m} + \frac{3\cdot 5n^2}{2\cdot 4m^2} + \frac{3\cdot 5\cdot 7n^3}{2\cdot 4\cdot 6m^3} + \cdots\right),$$

usw.

Folgerung. Wenn man l, m und n einander gleich setzt, so wird die Größe

$$\frac{l}{m-n} = \frac{l}{0} = \infty,$$

Die obigen Reihen gehen aber in die Reihen der reinen Koeffizienten über

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots,$$

$$1+\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots,$$

. . . .

Diese Reihen entstehen durch fortgesetzte Multiplikation von Brüchen, deren Zähler und Nenner in arithmetischer Progression aufsteigen nach Differenzen, die dem ersten Nenner gleich sind. Wir können aus dem Obigen schließen, daß derartige Reihen unendliche Summen geben. Das kommt noch klarer auf folgende Weise heraus. Man vermindere die Zähler und mache sie den einzelnen Nennern gleich, und zwar den zweiten Zähler dem ersten Nenner, den dritten dem zweiten, den vierten dem dritten und so fort. Dadurch erhält man z. B. anstatt der ersten Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots,$$

d. h. wenn man die sich forthebenden Zahlen streicht,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\infty$$

nach Folgerung 2 in XVI. Daher wird um so mehr die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

wegen der größeren Zähler unendlich sein. Übrigens ist das letzte Glied jeder Reihe bald Null, bald unendlich, je nachdem der Exponent p der Potenz oder der erste Bruch der Reihe kleiner oder größer als 1 ist. So ist das letzte Glied der ersten Reihe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots$$

Null. Wäre es nämlich etwas, so wäre auch

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

etwas, weil die einzelnen Faktoren der Reihe nach größer sind als bei dem vorigen Gliede. Daher wäre auch das Produkt beider etwas, d. h.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \text{ mal } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

oder, wenn man die Faktoren beider abwechselnd mischt,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{\infty - 1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

da alle auf den ersten folgenden Zähler und alle dem letzten vorangehenden Nenner sich gegenseitig fortheben. Das ist aber ein Widerspruch. Dagegen ist das letzte Glied der dritten Reihe, d. h.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdots$$

unendlich. Wäre es nämlich endlich, so wäre auch

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdots$$

endlich, da die einzelnen Faktoren hier kleiner sind als dort. Es wäre daher auch das Produkt beider endlich, d. h.[11]

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \text{ mal } \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{\infty}{\infty - 1} = \frac{\infty}{2} = \infty,$$

da alle dem letzten vorangehenden Zähler und alle auf den ersten folgenden Nenner sich gegenseitig zerstören. Das ist ebenfalls ein Widerspruch.

LIV.

Dasselbe zu erreichen durch Erhebung eines Binoms zu einer unbestimmten Potenz.

Die rationale Größe, deren Potenz man in Form einer Reihe wünscht, sei durch das Binom $1 + n$ ausgedrückt, wobei $1 > n$ angenommen wird. Die unbestimmte Potenz p dieses Binoms drückt sich, wie schon allenthalben unter den Geometern bekannt ist, durch die Reihe

$$1 + \frac{p}{1} n + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} n^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \cdots$$

aus[42]. Man sieht, daß die Reihe, so oft der Exponent p der Potenz eine positive ganze Zahl ist, notwendig einmal abbricht, da man bei der weiteren Fortsetzung der Koeffizienten $p(p-1)(p-2)\ldots$ notwendig einmal zu $p-p=0$ kommt. Dann verschwindet aber das betreffende Glied und von ihm ab alle folgenden. Wenn jedoch p eine gebrochene Zahl oder negativ ist, so werden die Koeffizienten niemals zu Null, und die Reihe läuft daher ins Unendliche. Aus diesem Grunde hat man z. B. für $p=\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+n}=1+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2\cdot 4}n^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}n^3-\cdots,$$

für $p=\frac{1}{3}$

$$\sqrt[3]{1+n}=1+\frac{1}{3}n-\frac{2}{3\cdot 6}n^2+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}n^3-\cdots,$$

für $p=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}}=1-\frac{1}{2}n+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^3+\cdots,$$

und ähnlich in den übrigen Fällen.

Man beachte, daß die Erhebung eines Binoms zu einer unbestimmten Potenz und das Interpolationsverfahren in Wirklichkeit auf dasselbe hinauskommen und sich auf eine und dieselbe Grundlage stützen. Das beruht auf einer Eigenschaft der figurierten Zahlen, die schon oben berührt wurde. Wir sparen aber ihren Beweis, um hier nicht zu ausführlich zu sein, für eine andere Gelegenheit auf.

LV.

Bei zwei unbestimmten Größen die Beziehung der einen zur andern durch eine Reihe auszudrücken mit Hilfe einer fingierten Reihe, die man statt der gesuchten annimmt.[43])

Man setze die eine der beiden Unbestimmten x, y, deren Beziehung zueinander gesucht wird, etwa y, gleich der Reihe

$$a+bx+cx^2+ex^3+\cdots$$

oder

$$a + bx^2 + cx^4 + ex^6 + \cdots$$

oder

$$a + bx^4 + cx^8 + ex^{12} + \cdots$$

oder gleich einer ähnlichen, je nachdem es geeignet erscheint. Darauf ersetze man in der vorgelegten Größe oder Gleichung y durch diese Reihe, ebenso dy, ddy, ... durch das erste, zweite, ... Differential der Reihe. Alsdann werden sich durch Vergleichung der entsprechenden Glieder die angenommenen Koeffizienten a, b, c, ... bestimmen lassen. Es folgen Beispiele.

LVI.

Die Relation zwischen den Koordinaten der Elastica durch eine Reihe zu finden.

Ein Elater werde durch eine Kraft, die in A angebracht ist und nach der Richtung AZ zieht, zu der Krümmung AQR gebogen (Fig. 11). Es sei

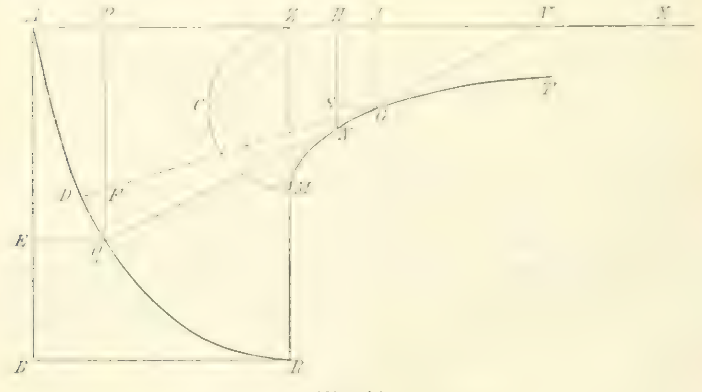


Fig. 11.

$$AB \text{ oder } RZ = a,$$
$$AE \text{ oder } PQ = x,$$
$$AP \text{ oder } EQ = y,$$
$$AQ = z.$$

In den »Acta Lipsiensia«, 1694, S. 272 und 1695, S. 538, ist gezeigt worden[41], daß die Natur dieser Kurve durch die Gleichung

$$dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

ausgedrückt wird. Wenn jemand nach der Methode des Diophant, die wir in dem vorigen Teil gebraucht haben, hier die Irrationalität beseitigen wollte, so würde er ein Menschenalter verbrauchen[45]. Denn die Geometer haben bemerkt, daß eine Summe oder eine Differenz von zwei Biquadraten wie $a^4 - x^4$ niemals ein Quadrat bilden kann. Daher müssen wir unsere Zuflucht zu den Interpolationen nehmen oder zu der unbestimmten Potenz eines Binoms, und zwar in folgender Weise.

Erste Art. Bezeichnen wir x^4 sowohl mit l als auch mit n und a^4 mit m, so wird

$$\frac{x^4}{a^4 - x^4} = \frac{l}{m - n}.$$

Nach LIII hat man also

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}}, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt{\frac{x^4}{a^4 - x^4}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1 \cdot 3x^{10}}{2 \cdot 4a^{10}} + \cdots$$

und, wenn man mit dx multipliziert,

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = dy = \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{1x^6 dx}{2a^6} + \frac{1 \cdot 3x^{10} dx}{2 \cdot 4a^{10}} + \cdots.$$

Hieraus erhält man durch Summation

$$AP \text{ oder } y = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{1x^7}{2 \cdot 7a^6} + \frac{1 \cdot 3x^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 11a^{10}} + \cdots.$$

Zweite Art. Deuten wir jetzt a als 1 und $-x^2$ als n, so wird

$$a^4 - x^4 = 1 + n \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Nach LIV ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^8 + \cdots$$

und, wenn man mit x^2dx multipliziert,

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = x^2dx + \frac{1}{2}x^6dx + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{10}dx + \cdots.$$

Durch Integration findet man

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 7}x^7 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11}x^{11} +$$

oder, wenn man schließlich die Einheit ergänzt,

$$\frac{x^3}{3a^2} + \frac{1x^7}{2\cdot 7a^6} + \frac{1\cdot 3x^{11}}{2\cdot 4\cdot 11a^{10}} + \cdots$$

wie vorhin.

Folgerung. Wenn man $x = a = 1$ nimmt, so wird das das ganze AZ gleich

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} + \cdots.$$

Vgl. Acta Lipsiensia 1694, S. 274 und 369.

LVII.

Dieselbe Kurve durch eine Reihe zu rektifizieren.

Da die Gleichung der Kurve wie gesagt

$$dy = \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$$

ist, so ergibt sich durch Quadrieren

$$dy^2 = \frac{x^4dx^2}{a^4-x^4}$$

und

$$dz^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{x^4dx^2}{a^4-x^4} + dx^2 = \frac{a^4dx^2}{a^4-x^4},$$

mithin

$$dz = \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Bezeichnen wir a^4 bald mit l, bald mit m und x^4 mit n, so wird

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^4}{a^4-x^4}} = \sqrt{\frac{l}{m-n}}$$

sein. Daher wird nach LIII

$$\sqrt{\frac{l}{m-n}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^4}{a^4-x^4}}$$

$$= 1 + \frac{1x^4}{2a^4} + \frac{1\cdot 3x^8}{2\cdot 4a^8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}}{2\cdot 4\cdot 6a^{12}} + \cdots$$

und (nach Multiplikation mit dx)

$$\frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = dx + \frac{1x^4dx}{2a^4} + \frac{1\cdot 3x^8dx}{2\cdot 4a^8} + \cdots$$

und schließlich, wenn man summiert,

$$\text{oder } AQ = x + \frac{1x^5}{2\cdot 5a^4} + \frac{1\cdot 3x^9}{2\cdot 4\cdot 9a^8} + \cdots.$$

Dasselbe läßt sich in ähnlicher Weise mit Hilfe von LIV zeigen.

Folgerung. Setzt man $x = a = 1$, so erhält für die ganze Kurve AQR

$$1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} + \cdots.$$

Siehe Acta Lipsiensia 1694, S. 274.

LVIII.

Grenzen für die obigen Reihen zu bestimmen.

Da die nach diesen Methoden gefundenen Reihen allzu langsam konvergieren, so ist es nicht unzweckmäßig, wenn ich einen Weg zeige, wie wir uns mit leichter Mühe ihren Summen, soweit es für die Praxis ausreicht, nähern und dafür Grenzen festlegen können. Es handle sich z. B. um die beiden letzten Reihen, durch die die Ordinate BR oder AZ der Elastica und die Länge AR dieser Kurve ausgedrückt wird, nämlich

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 7} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 11} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 15} + \cdots$$

und

$$1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13} + \cdots.$$

Ich nehme eine Größe, deren Integral sich erhalten läßt, und die in der Nähe der gegebenen

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}} \quad \text{und} \quad \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$$

liegt, aus denen die vorgelegten Reihen geflossen sind. Ich nehme z. B. die Größe

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

deren Integral

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - x^4}$$

ist, und löse sie nach der gleichen Methode in eine Reihe auf. Integriere ich die Glieder der Reihe und setze dann für x und a die Einheit, so ergibt sich

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 8} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 12} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 16} + \cdots.$$

Diese Reihe ist also gleich

$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - x^4} = \frac{1}{2} = 0{,}500\,0000\,.$$

Jetzt fasse ich bei den einzelnen Reihen irgend eine Anzahl von Gliedern am Anfang zu einer Summe zusammen, was bequem mit Logarithmen geschieht, z. B. die zehn ersten Glieder. Sie geben zusammen

bei der ersten Reihe 0,510 256 0,

bei der zweiten 1,220 718 7,

bei der dritten 0,411 901 4.

Bei dieser machen also die übrigen Glieder hinter dem zehnten, um die Ergänzung zu $\frac{1}{2}$ oder 0,500 000 0 zu liefern,

0.088 098 6

aus. Addiert man diese Zahl zu der Summe der zehn ersten Glieder in der ersten und zweiten Reihe, so kommt heraus

0,598 354 6 und 1,308 817 3.

Diese Zahlen sind sicher kleiner als die Summen der ganzen Reihen, weil die einzelnen Glieder der dritten Reihe kleiner sind als die entsprechenden Glieder der übrigen.

Da ferner die elften Glieder in jenen drei Reihen

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20\cdot 43},\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 19}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 20\cdot 41},\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 19}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 20\cdot 44}$$

sind, so verhält sich offenbar dieses Glied in der dritten Reihe zu demselben in der ersten Reihe wie 43 zu 44 und zu demselben in der zweiten wie 41 zu 44. Dagegen haben die einzelnen Glieder der dritten Reihe, die dann folgen, zu den Gliedern desselben Ranges in den übrigen Reihen ein Verhältnis, das größer als 43 zu 44, bzw. 41 zu 44 ist. Daher wird auch das Verhältnis der Summe aller auf das zehnte folgenden Glieder in der dritten Reihe zu der Summe aller auf das zehnte folgenden in den übrigen Reihen größer als jene Zahlen sein. Es verhält sich nun die Summe aller auf das zehnte folgenden Glieder in der dritten Reihe, d. h. 0,0880986 zu 0,0901474, bzw. 0,0945448 gerade wie 43 zu 44, bzw. 41 zu 44. Daher werden diese Zahlen größer sein als die Summen der auf das zehnte folgenden Glieder in der ersten und in der zweiten Reihe. Addiert man sie also zu den Summen der zehn vorhergehenden Glieder, die 0,5102560 und 1,2207187 lauten, so werden auch die entstehenden Zahlen 0,6004034 und 1,3152635 größer sein als die Summen der ganzen Reihen.

Damit sind also Grenzen gefunden, zwischen denen die Summen der ersten und der zweiten Reihe liegen. Die Grenzen jener sind

$$0{,}5983546 \quad \text{und} \quad 0{,}6004034,$$

die Grenzen dieser

$$1{,}3088173 \quad \text{und} \quad 1{,}3152635.$$

Daher ist die Ordinate BR oder AZ

größer als 0,598 und kleiner als 0,601,

die Kurve AR aber selbst

größer als 1,308 und kleiner als 1,316,

so daß die drei Linien RZ, AZ und AQR sich annähernd verhalten wie 10 zu 6 zu 13. Vgl. Acta Lipsiensia, 1694, S. 274.

Bemerkung. Aus der Natur des Falles schwerer Körper wird bewiesen, daß die Fallzeit eines Pendels längs des Viertelkreises zur Dauer des senkrechten Falles längs seines Radius sich verhält wie die Elastica AR zu ihrer Achse RZ, ein Verhältnis, das, wie wir gezeigt haben, größer als 1308 zu 1000 und kleiner als 1316 zu 1000 ist. Die Dauer des senkrechten Falles längs des Kreisradius aber verhält sich zu der Fallzeit längs des halben Radius wie $\sqrt{2}$ zu 1 und die Fallzeit längs des halben Radius zu der Fallzeit längs eines äußerst kleinen Bogens nach *Huygens* im Horologium oscillatorium, S. 155, wie der Durchmesser des Kreises zum halben Umfang, d. h. wie 226 : 355. Man kann also schließen, daß die Fallzeit des Pendels längs des ganzen Viertelkreises zur Fallzeit längs eines äußerst kleinen Bogens in einem Verhältnis steht, das größer als 3400 zu 2888 und kleiner als 3400 zu 2869 ist. Das Verhältnis 3400 zu 2900 oder 34 zu 29, das der genannte Autor daselbst auf S. 9 für diese Fallzeiten angibt, fällt offenbar außerhalb dieser Grenzen.

LIX.

Den Numerus eines gegebenen Logarithmus durch eine Reihe zu finden.

Man denke sich die logarithmische Kurve PWQ. Ihre Achse sei AD, die konstante Subtangente gleich t, die Ordinate $BC = 1$, der gegebene Logarithmus $BJ = Bt = x$ und sein Numerus $JO = to = y$. Dann ist nach der allgemeinen Natur der Kurven

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t},$$

mithin

$$y = \frac{t\,dy}{dx}.$$

Man setze nach der Vorschrift in Satz LV

$$y = 1 + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots.$$

Durch Differentiation folgt

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3ex^2 + \cdots,$$

und es wird also sein

$$1 + bx + cx^2 + \cdots = y = \pm \frac{t\,dy}{dx}$$
$$= \pm bt \pm 2ctx \pm 3etx^2 \pm \cdots.$$

Vergleicht man die entsprechenden Glieder, so erhält man

$$b = \pm \frac{1}{t}, \quad c = \pm \frac{b}{2t} = \frac{1}{1 \cdot 2t^2},$$
$$e = \pm \frac{c}{3t} = \pm \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3}, \quad \cdots.$$

Setzt man diese Werte der Koeffizienten ein, so ergibt sich

$$y = 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{x^2}{1 \cdot 2t^2} \pm \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3} + \cdots.$$

Vgl. Acta Lipsiensia 1693, S. 179.

Dasselbe auf andere Weise ohne Zuhilfenahme der Differentiale.

Man denke sich den Logarithmus $BJ(B\iota)$ in beliebig viele gleiche Teile BE, EF, FG usw. ($B\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ usw.) geteilt. Ihre Anzahl sei n, und die einzelnen Teile mögen d heißen, so daß

$$nd = BJ(B\iota) = x$$

ist. Man konstruiere an der Kurve ebenso viele Ordinaten

$$EK,\ FL,\ GM \text{ usw. } (\varepsilon\varkappa,\ \varphi\lambda,\ \gamma\mu \text{ usw.})$$

und verbinde die Endpunkte C und $K(\varkappa)$ von BC, $EK(\varepsilon\varkappa)$ durch die Gerade $CK(C\varkappa)$. Der Achsenabschnitt zwischen der verlängerten $CK(C\varkappa)$ und der Ordinate BC sei gleich t. Dann wird wegen der ähnlichen Dreiecke

$$t : 1(BC) = (t \pm d) : \left(1 \pm \frac{d}{t} = EK(\varepsilon\varkappa)\right).$$

Da wegen der Gleichheit von BE, EF, FG usw. ($B\varepsilon$, $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ usw.) die Ordinaten BC, EK, FL usw. (BC, $\varepsilon\varkappa$, $\varphi\lambda$ usw.) in stetiger Proportion stehen, und die erste von ihnen $BC = 1$ ist, so wird $FL(\varphi\lambda)$ die zweite, $GM(\gamma\mu)$ die dritte, $RN(\varrho\nu)$ die vierte und schließlich $JO(\iota o)$ oder y die $n$te Potenz der Ordinate $EK(\varepsilon\varkappa)$ oder $1 \pm \frac{d}{t}$ bezeichnen; denn n ist die Anzahl der Teilchen, in die man $BJ(B\iota)$ zerlegt hat. Diese Potenz wird nach LIV gleich

$$1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{n(n-1)d^2}{1 \cdot 2t^2} \pm \frac{n(n-1)(n-2)d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3} + \cdots$$

gefunden. Wenn wir nunmehr n unendlich annehmen, so wird die verlängerte CK (Cz) in die Tangente übergehen und t in die Subtangente der logarithmischen Kurve. Ferner werden die Zahlen 1, 2, 3, ... gegen n verschwinden, so daß $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... ebenso viel gelten wie n. Es wird dann also

$$y = 1 \pm \frac{nd}{t} + \frac{n^2d^2}{1 \cdot 2t^2} \pm \frac{n^3d^3}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3} + \cdots$$

$$= 1 \pm \frac{x}{t} + \frac{x^2}{1 \cdot 2t^2} \pm \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3t^3} + \cdots, \qquad \text{wegen } nd = x$$

wie oben.[46]

Man beachte, daß im Falle $x > t$ die Glieder der Reihe zwar bis zu einer gewissen Stelle wachsen, schließlich jedoch Schritt für Schritt abzunehmen beginnen und zuletzt nach Null hinstreben. Nimmt man nämlich vom Anfang an m Glieder, so wird nach dem Gesetz der Reihe das letzte unter ihnen

$$\frac{x^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)t^{m-1}}$$

sein und das nächstfolgende

$$\frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdots mt^m}.$$

Jenes verhält sich zu diesem wie $mt : x$. Da nun das Verhältnis $t : x$ ein bestimmtes ist, die Gliederzahl m aber immer größer und größer angenommen werden kann, so wird auch das Verhältnis $mt : x$ schließlich größer als jedes gegebene. Wenn aber $x = t$ oder $< t$ ist, so konvergiert jene Reihe, und andere von dieser Art, gleich von Anfang an sehr rasch und um so rascher, je kleiner x ist. Daraus lernen wir, daß sich viel bequemer und mit geringerer Mühe eine Logarithmentafel herstellen läßt, wenn man nach diesem Satze aus den gegebenen Logarithmen die Zahlen berechnet, als wenn man umgekehrt nach XLVII aus den gegebenen Zahlen die Logarithmen sucht. Freilich bietet sich uns auch dort eine nicht zu verachtende Abkürzung.[47] Da wir sie bei dem genannten Satze unerwähnt vorübergehen ließen, so müssen wir sie hier noch kurz angeben. Es sei bei der logarithmischen Kurve (Fig. 8, Nr. XLVII) $AB = a$, die Subtangente $AK = t$, $BI = x$

und $Br = s$, mithin $RE = a - u$, und $\varrho\varepsilon = a + s$. Dann findet man nach XLVII

$$AR = \text{Log}\, RE = t\left(\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^3}{3a^3} + \cdots\right)$$

und

$$A\varrho = \text{Log}\, \varrho\varepsilon = t\left(\frac{s}{a} - \frac{s^2}{2a^2} + \frac{s^3}{3a^3} - \cdots\right).$$

Es folgt aus der Natur der logarithmischen Kurve, daß diese beiden Reihen einander gleich sind, wenn die drei Ordinaten RE, AB, $\varrho\varepsilon$ oder $a - u$, a und $a + s$ eine stetige Proportion bilden, wenn also

$$u = \frac{as}{a + s}$$

gesetzt wird. Da aber bei dieser Annahme immer $u < s$ wird und z. B. den Werten $s = a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, ... die Werte $u = \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, ... entsprechen, so wird immer die erste Reihe viel schneller konvergieren als die zweite. Daher kann man bei der praktischen Berechnung der Logarithmen viel Arbeit sparen, wenn man also z. B. (im Falle $s = a$) statt der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

d. h. statt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

die Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + \cdots$$

einsetzt. Denn durch die 18 ersten Glieder dieser Reihe erreicht man eine ebenso große Annäherung wie durch 1000 Glieder der andern. Dasselbe läßt sich zu Folgerung 3 in XLVII betreffs der Bestimmung der Subtangente der logarithmischen Kurve bemerken. Aber die Enge des Raumes verbietet eine ausführlichere Darlegung dieser äußerst nützlichen Sache.

Bemerkung. Eine Summe Geldes sei auf Zinsen angelegt mit der Bestimmung, daß in den einzelnen Augenblicken

ein proportionaler Teil der Jahreszinsen zum Kapital geschlagen wird. Man stelle aber das Kapital selbst durch BC oder 1 dar, den Zeitraum eines Jahres durch BJ oder x, und er sei mittels der Punkte E, F, G usw. in unzählige gleiche Augenblicke geteilt. Der Jahreszins sei $\frac{x}{t}$. Die gefundene Reihe

$$1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 t^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 t^3} + \cdots$$

d. h. (wenn man das Kapital 1 mit a und den Zins $\frac{x}{t}$ mit b bezeichnet)

$$a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^2} + \cdots,$$

wird den Wert dessen angeben, was am Ende des Jahres geschuldet wird. Wie nämlich die Jahresfrist BJ sich zu ihrem ersten Augenblick BE verhält, oder wie x sich zu d verhält, so verhält sich der Jahreszins $\frac{x}{t}$ zu dem Proportionalteil des Zinses. Dieser wird also $\frac{d}{t}$ sein. $1 + \frac{d}{t}$, oder die Ordinate EK wird das um den genannten Proportionalteil des Zinses vermehrte Kapital darstellen. Das vermehrte Kapital EK wird dann im zweiten Augenblick FL liefern und dieses ebenso im dritten Augenblick GM usw., da BC, EK, FL, GM usw. Proportionalen sind. Daher wird die letzte Ordinate JO, die sich durch die gefundene Reihe ausdrückt, den Wert dessen bezeichnen, was dem Gläubiger nach Verlauf des ganzen Jahres geschuldet wird. Vgl. Acta Lipsiensia 1690, S. 222.[48]

LX.

Den Inhalt des Raumes zu finden, der von der erzeugenden Kurve der Elastica begrenzt wird, d. h. von der Kurve, aus der diese durch Abwicklung entsteht (Fig. 11).

Die Elastica AQR werde durch Abwicklung der Kurve MNT beschrieben, und der abwickelnde Faden sei $QNDG$. Er schneide mit seiner Verlängerung die Achse in V, und man setze wie oben

$$RZ = a, \quad PQ = x, \quad AP = y.$$

Da aus Acta Lipsiensia 1694, S. 273, hervorgeht, daß

$$QN = \frac{1}{2} QV$$

ist, so wird

$$NH = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} x$$

und

$$NS = \frac{1}{2} FQ = \frac{1}{2} dx$$

sein, ferner wegen des rechten Winkels DQN

$$DF : FQ \text{ oder } dy : dx$$

$$= x^2 : \sqrt{a^4 - x^4} \quad \text{(nach der Natur der Elastica)}$$

$$= \frac{1}{2} dx (NS) : \frac{dx \sqrt{a^4 - x^4}}{2x^2} = SG \text{ oder } HJ,$$

mithin $HJ \times NH$ oder das Rechteck NJ gleich

$$\frac{x\,dx \sqrt{a^4 - x^4}}{4x^2} = \frac{(a^4 x - x^5)\,dx}{4x^2 \sqrt{a^4 - x^4}}$$

$$= \frac{a^4 x\,dx}{4x^2 \sqrt{a^4 - x^4}} - \frac{x^3\,dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Das ist das Element des Raumes $MNHZ$, und es handelt sich um die Summation dieses Elements. Das Integral des zweiten Gliedes

$$\frac{x^3\,dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$$

in bezug auf den Kurventeil RQ oder MN ist

$$\frac{1}{8} \sqrt{a^4 - x^4}.$$

Das erste Glied aber,

$$\frac{a^4 x\,dx}{4x^2 \sqrt{a^4 - x^4}},$$

läßt sich nicht absolut summieren und wird nach Beseitigung der Irrationalität in eine Reihe verwandelt werden, wie folgt.

Man setze

$$\sqrt{a^4 - x^4} = \frac{t x^2}{a} - a^2.$$

Dann wird

$$x^2 = \frac{2a^3t}{a^2+t^2}$$

und, wenn man differentiiert,

$$-x\,dx = \frac{(a^3t^2 - a^5)\,dt}{(a^2+t^2)^2},$$

ferner

$$\frac{tx^2}{a} - a^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{a^4-x^4} = \frac{a^2t^2-a^4}{a^2+t^2}$$

und endlich

$$-\frac{a^4x\,dx}{4x^2\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{a^2dt}{8t}.$$

Wenn x seinen größten Wert a hat, so wird auch $t = a$, und wenn x abnimmt, so wächst t. Man setze daher

$$t = a + s.$$

Dann ist

$$\frac{a^2dt}{8t} = \frac{a^2ds}{8a+8s} = \frac{1}{8}\,\frac{a^2ds}{a+s}$$

$$= \frac{1}{8}\,a^2\left(\frac{ds}{a} - \frac{s\,ds}{a^2} + \frac{s^2ds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \cdots\right),$$

nach XXXVII. Nimmt man die Summation vor, so erhält man

$$\int\frac{a^2dt}{8t} = \int\frac{a^4x\,dx}{4x^2\sqrt{a^4-x^4}}$$

(das Zeichen — lassen wir fort, weil es hier nur die bezügliche Abnahme der x andeutet)

$$= \frac{1}{8}\,a^2\left(\frac{s}{a} - \frac{s^2}{2a^2} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \cdots\right).$$

Zieht man davon

$$\int\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$$

ab, so ergibt sich

$$\int\frac{a^4x\,dx}{4x^2\sqrt{a^4-x^4}} - \int\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$$

$$= \frac{1}{8}\,a^2\left(\frac{s}{a} - \frac{s^2}{2a^2} + \frac{s^3}{3a^3} - \cdots\right) - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}.$$

Das ist der gesuchte Raum $MNHZ$. Nimmt man

$$u = \frac{as}{a+s},$$

so wird

$$\frac{s}{a} - \frac{s^2}{2a^2} + \frac{s^3}{3a^3} - \cdots$$

gleich der Reihe

$$\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^3}{3a^3} + \cdots$$

nach einer Bemerkung beim vorigen Satze. Daher läßt sich der genannte Raum $MNHZ$ auch so ausdrücken:

$$\frac{1}{8}a^2\left(\frac{u}{a} + \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^3}{3a^3} + \cdots\right) - \frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}.$$

Bei der Annahme

$$a^2 = 8 \text{ und } s = a, \text{ also } t \text{ oder } a + s = 2a$$

$$\text{und } x \text{ oder } \sqrt{\frac{2a^3t}{a^2+t^2}} = 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\text{und } u \text{ oder } \frac{as}{a+s} = \frac{1}{2}a,$$

wenn also dem über MZ, der Hälfte von RZ, konstruierten Halbkreis das gleichschenklige Dreieck MCZ einbeschrieben ist, dessen Schenkel MC die Einheit bezeichnet, und der Kurve MNT die Ordinate

$$NH\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

angelegt wird, bemerke man, daß der genannte Raum $MNHZ$ gleich

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{3}{5}$$

wird, oder auch gleich

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} + \cdots - \frac{3}{5}.$$

Vgl. Acta Lipsiensia 1694, S. 273.

Folgerung 1. Aus dem, was ich an der eben zitierten Stelle der Acta gelehrt habe, kann man entnehmen, daß

$$QV = \frac{a^2}{x} \quad \text{und} \quad QX = \frac{1}{2} QV = \frac{a^2}{2x}$$

$$\text{und } DQ \text{ oder } dz = \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

ist. Es folgt daraus, daß das Dreieck

$$QGD\left(QD \times \frac{1}{2} QX\right) = \frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}},$$

mithin alle Dreiecke QGD oder der Raum $RMNQR$ gleich

$$\int \frac{a^4 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}},$$

also (wie gezeigt worden) gleich dem Raum

$$MNHZ + \int \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Da nun

$$\int \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{8}\sqrt{a^4 - x^4}$$

den vierten Teil des Elasticagebietes $PQRZ$ ausdrückt (was von selbst klar ist), so können wir schließen, daß der Raum $RMNQR$ die Fläche $MNHZ$ um ein Viertel von $PQRZ$ übertrifft.

Folgerung 2. Das Differential

$$\frac{a^2 dt}{8t},$$

auf welches wir das Element des Raumes $MNHZ$ oder $RMNQR$ zurückgeführt haben, bezeichnet auch das Element eines hyperbolischen Gebietes zwischen den Asymptoten, dessen Abszisse vom Mittelpunkt aus gleich t ist. Nun wächst aber t unter der von uns gemachten Annahme

$$\sqrt{a^4 - x^4} = \frac{tx^2}{a} - a^2$$

ins Unendliche, wenn x nach Null abnimmt, und ein ins Unendliche sich ausdehnendes hyperbolisches Gebiet ist unendlich. Deshalb ist auch der ganze unbegrenzte Raum bei der Erzeugenden der Elastica, d. h. $MNTHZ$ oder $NTHH$ unendlich. Siehe Acta Lipsiensia a. a. O.



Anmerkungen.

Über das Leben der beiden *Bernoulli* ist in Heft 107 dieser Sammlung berichtet worden. Hier sei nur hervorgehoben, daß *Jakob Bernoulli* (1654—1705) und sein Bruder *Johann Bernoulli* (1667—1748) innerhalb der *Leibniz*schen Schule die bedeutendsten Förderer der Infinitesimalrechnung waren. Unter den Anhängern *Newtons* wird man Männer von ähnlicher Genialität und Arbeitskraft nicht nennen können. Den *Bernoulli* ist es zu danken, daß die *Leibniz*sche Auffassung der Infinitesimalrechnung und seine zweckmäßige Symbolik gleich zu Anfang eine so große Verbreitung fanden. Ein Schüler *Johann Bernoullis*, der *Marquis de l'Hospital*, war es auch, der das erste Buch über Differentialrechnung schrieb (Analyse des infiniment petits, 1696). Der Vater des berühmten *Euler* studierte bei *Jakob Bernoulli*, und *Leonhard Euler* selbst gehört zu den Schülern *Johann Bernoullis*.

Die obigen Aufsätze über unendliche Reihen stehen zwar, vom modernen Standpunkt betrachtet, nicht auf Höhe der mathematischen Strenge. Aber es finden sich doch darin viele Stellen, wo man über die Korrektheit der Beweisführung staunen muß. Z. B. wird in durchaus befriedigender Weise gezeigt, daß im Falle $0 < a < 1$

$$\lim a^n = 0$$

ist (S. 6). Ferner wird wirklich bewiesen, daß

$$\lim \frac{a + nb}{c + nd} = \frac{b}{d}$$

ist.

Wenn man den Wert einer mathematischen Leistung nach der anregenden Wirkung beurteilen will, die sie auf die Zeitgenossen ausgeübt hat, so muß man *Bernoullis* Untersuchungen über unendliche Reihen sehr hoch stellen. Wir finden diese Arbeiten

z. B. bei *Euler* mehrfach zitiert und können konstatieren, daß sie ihn auf wichtige neue Gedanken gebracht haben (vgl. z. B. Anm. 17).

Was die Geschichte der unendlichen Reihen anbetrifft, so finden sich schon bei *Euklid* und *Archimedes* Darstellungen von Größen durch unendliche Reihen, wie überhaupt unendliche Prozesse den alten griechischen Mathematikern nichts Ungewöhnliches waren (vgl. *Euklid*, Buch X). Von späteren Förderern der Theorie der unendlichen Reihen muß man besonders *Nikolaus Mercator* (1667 erschien seine Logarithmotechnia) nennen. Er war ein Deutscher, und zwar ein geborener Holsteiner, ist aber nicht zu verwechseln mit dem Geographen *Gerhard Mercator*. *Nikolaus Mercator* quadrierte die gleichseitige Hyperbel

$$y = \frac{1}{1+x},$$

indem er $1:(1+x)$ durch fortgesetzte Division in die Reihe

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

entwickelt und dann (modern ausgedrückt) gliedweise integrierte. Dies war das erste Beispiel einer Integration mit Hilfe der Reihenentwicklung (vgl. oben S. 54ff.).

Auch der berühmte *Wallis* (1616—1703) hat sich viel mit unendlichen Reihen beschäftigt. Wir finden bei ihm schon die Reihe der reziproken Quadratzahlen

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

von der *Jakob Bernoulli* auf S. 24 der obigen Arbeit spricht, und deren Summe erst *Euler* gefunden hat.

Es ist interessant zu sehen, wie sich diese Forscher zur Frage der Konvergenz stellen. Die Unterscheidung zwischen konvergenten und divergenten Reihen war ihnen keineswegs fremd, was sich auch in *Bernoullis* Aufsätzen deutlich zeigt. Sie wußten auch schon, daß bei einer konvergenten Reihe das allgemeine Glied den Grenzwert Null hat, daß dies aber keine hinreichende Konvergenzbedingung ist (vgl. S. 19). Trotzdem rechneten sie mit divergenten Reihen meist wie mit konvergenten. Zwar fiel es ihnen schon auf, daß man dabei unter Umständen falsche Resultate findet (vgl. S. 36). Sie suchten aber, derartige »Paradoxien« in jedem einzelnen Falle besonders aufzuklären. Ganz auf den Gebrauch der divergenten Reihen zu

verzichten, konnten sie sich nicht entschließen, und auch *Euler* rechnet mit ihnen ohne Bedenken weiter. Man darf dieses Verhalten der berühmten Forscher nicht belächeln. Auch in der modernsten Mathematik gibt es ähnliche Erscheinungen. Die Paradoxien, die in der Mengenlehre zum Vorschein kamen, haben die Mathematiker keineswegs veranlaßt, auf die unendlichen Mengen überhaupt zu verzichten. Sie haben vielmehr bei jeder Paradoxie eine Erklärung gesucht und sich so darüber hinweggeholfen. Erst in allerjüngster Zeit hat sich dieser Zustand geändert durch die axiomatische Begründung der Mengenlehre, wie sie *Zermelo* gegeben hat.

So kann man vielleicht auch sagen, daß die *Bernoulli*, *Euler* und andere nicht so Unrecht hatten, wenn sie trotz einiger Paradoxien die divergenten Reihen als Forschungsmittel ruhig beibehielten, und daß *Cauchy* mit seiner gänzlichen Verbannung der divergenten Reihen zu weit ging. Diese Anschauung wird durch die Tatsache gestützt, daß in unserer Zeit eine besondere Theorie der divergenten Reihen entstanden ist (Cesàro, Borel), die eine gewisse Gattung dieser Reihen wieder in den Bereich der erlaubten mathematischen Hilfsmittel aufnimmt.

---

1) *Zu S. 3.* Es handelt sich um *Leibniz'* Arbeit: »De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa«. Über das wahre Verhältnis des Kreises zum umbeschriebenen Quadrat in rationalen Zahlen ausgedrückt. Hier wird für das fragliche Verhältnis der Wert

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

angegeben oder

$$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots\right)$$

die Zahlen 3, 35, 99, ... findet man aus der Folge 3, 8, 15, 24, 35, ... der um 1 verminderten Quadratzahlen, indem man vom ersten Gliede anfängt und immer drei Glieder überspringt. Am Schluß der Arbeit sagt *Leibniz* dann ohne Beweis:

»Ich habe gefunden, daß die Summe der Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \cdots$$

$\frac{3}{4}$ ist. Überspringt man immer nur ein Glied, so findet man die Reihe

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots,$$

deren Summe $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ beträgt usw.

Das Unterdrücken des Beweises war ein damals sehr verbreitetes Verfahren. So hat *Leibniz* auch 1684 seine Differentiationsregeln ohne Beweise veröffentlicht.

2) *Zu S. 2.* Wenn es sich um eine endliche Größe handelt, ist das Axiom trivial. Aber *Bernoulli* wendet es auch auf unendliche Größen an.

3) *Zu S. 3.* Der Satz bei *Euklid* lautet:

Sind vier Größen proportioniert, so sind die größte und kleinste zusammen größer als die beiden übrigen.

Wenn also

$$a : b = c : d$$

und a die größte der positiven Größen a, b, c, d ist, so folgt

$$a + d > b + c.$$

Setzt man in der Tat

$$b = \lambda a, \quad c = \mu a$$

so liegen λ, μ beide zwischen 0 und 1, und es ist außerdem

$$d = \lambda c = \lambda \mu a.$$

Die behauptete Ungleichung reduziert sich jetzt auf

$$1 + \lambda \mu > \lambda + \mu$$

oder

$$(1 - \lambda)(1 - \mu) > 0.$$

Sie ist wegen $0 < \lambda, \mu < 1$ erfüllt.

Bernoulli braucht an dieser Stelle den euklidischen Satz nur für den Fall $\lambda = \mu$ oder $b = c$. Daß aus $ad = b^2$ immer $a + d \geqq 2b$ folgt $(a, d \geqq 0)$, erkennt man sofort durch Quadrieren. $(a + d)^2 - 4b^2$ ist nämlich gleich $(a - d)^2$.

Am besten macht man sich den Satz IV an folgender Figur klar. Die Glieder der arithmetischen Reihe $y_0, y_1, y_2, \ldots$

sind Ordinaten einer Geraden, die der geometrischen Reihe $y_0, y_1, \frac{y_1^2}{y_0}, \frac{y_1^3}{y_0^2}, \cdots$ Ordinaten einer Kurve, die *Leibniz* und *Bernoulli* (vgl. oben S. 69) als »Logarithmica« (logarithmische Kurve) bezeichnen. Als Abszissen denken wir uns in beiden Fällen die Zahlen 0, 1, 2, ...

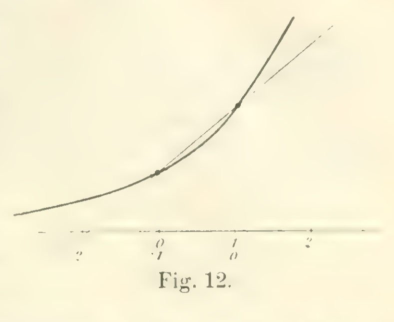


Fig. 12.

4) *Zu S. 6.* Es wird hier ein durchaus exakter Beweis dafür gegeben, daß a^n im Falle $a > 1$ über alle Grenzen wächst, wenn man n die Werte 1, 2, 3, ... durchlaufen läßt. Der Beweis stützt sich darauf, daß nach Satz IV die Glieder der geometrischen Reihe

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots$$

größer sind als die entsprechenden Glieder der arithmetischen Reihe

$$1,\quad 1+(a-1),\quad 1+2(a-1),\quad 1+3(a-1),\quad \cdots,$$

also auf die Ungleichung

$$a^n > 1 + n(a-1).$$

Genau ebenso wird die Formel $\lim a^n = \infty$ $(a > 1)$ auch in unsern modernen Lehrbüchern bewiesen.

5) *Zu S. 6.* Wir würden jetzt statt »letztes Glied« sagen »Grenzwert des allgemeinen Gliedes«.

6) *Zu S. 7.* Der Satz bei *Euklid* lautet:

»Sind mehrere Größen A, B, C, D, E, F proportioniert $(A:B = C:D = E:F)$, so verhalten sich alle Vorderglieder zusammen, $A + C + E$, zu allen Hintergliedern, $B + D + F$, wie ein Vorderglied A zu seinem Hintergliede B.«

7) *Zu S. 8.* Der Satz bei *Euklid* lautet:

Verhalten sich Ganze AB, CD wie Stücke von ihnen, AE, CF, so verhalten sich auch die Reste, CB, FD, wie die Ganzen.

8) *Zu S. 8.* Wir würden jetzt den Inhalt dieses Satzes durch die Formel

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a+nc}{b+nd}\right)=\frac{c}{d}$$

ausdrücken. *Bernoullis* erster Beweis ist im wesentlichen einwandfrei. Nur das Operieren mit dem „letzten Gliede“ entspricht nicht den modernen Gepflogenheiten. Der zweite Beweis, der mit den Worten beginnt: „Kürzer geht es so“, ist zu verwerfen, weil dabei mit dem Zeichen ∞ so gerechnet wird, als wäre es eine gewöhnliche Zahl.

9) *Zu S. 9.* Wenn

$$bc-ad>0$$

ist, so nimmt der Bruch

$$\frac{a+nc}{b+nd}$$

mit wachsendem n zu. Wenn

$$bc-ad<0$$

ist, nimmt jener Bruch ab. Im ersten Falle ist also

$$\frac{a}{b}<\frac{a+nc}{b+nd}<\frac{c}{d}\,,$$

im zweiten

$$\frac{a}{b}>\frac{a+nc}{b+nd}>\frac{c}{d}\,.$$

10) *Zu S. 10.* Es handelt sich darum, daß eine Folge von Brüchen, deren Zähler geometrisch, und deren Nenner arithmetisch aufsteigen oder umgekehrt schließlich monoton wird.

Die fragliche Reihe hat ein allgemeines Glied von der Form

$$\frac{a+nb}{q^{n-1}}\quad\text{bzw.}\quad\frac{q^{n-1}}{a+nb}\,,\qquad(b>0,\ q>1)\,.$$

Verlangt man, daß

$$\frac{a+(n+1)b}{q^{n}}<\frac{a+nb}{q^{n-1}}$$

sein soll, so findet man für n die Bedingung

$$n>\frac{a+b-aq}{b(q-1)}\,.$$

Unter derselben Bedingung ist

$$\frac{q^n}{a + (n+1)b} > \frac{q^{n-1}}{a + nb}.$$

In Nr. XIII wird noch gezeigt, daß

$$\lim\left(\frac{a + nb}{q^{n-1}}\right) = 0, \quad \text{also} \quad \lim\left(\frac{q^{n-1}}{a + nb}\right) = \infty$$

ist.

11) *Zu S. 12.* In dieser Nummer werden folgende Formeln bewiesen:

$$(1) \qquad 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2},$$

$$(2) \qquad 1 + 3q + 6q^2 + 10q^3 + \cdots = \frac{1}{(1-q)^3},$$

$$(3) \qquad 1 + 4q + 10q^2 + 20q^3 + \cdots = \frac{1}{(1-q)^4};$$

$$(4) \qquad 1 + 4q + 9q^2 + 16q^3 + \cdots = \frac{1+q}{(1-q)^3},$$

$$(5) \qquad 1 + 8q + 27q^2 + 64q^3 + \cdots = \frac{1 + 4q + q^2}{(1-q)^4}.$$

Die Koeffizienten sind bei (1) die natürlichen Zahlen, bei (2) die Dreieckszahlen, bei (3) die Pyramidalzahlen, bei (4) die Quadratzahlen, bei (5) die Kubikzahlen.

Die Bedingungen $0 < q < 1$ ist in der Formulierung des Satzes enthalten. Es wird nämlich gesagt, daß die Nenner in geometrischer Progression »wachsen« sollen.

12) *Zu S. 15.* Hier handelt es sich um die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots,$$

deren Nenner die Dreieckszahlen sind, so daß das allgemeine Glied der Reihe

$$\frac{2}{n(n+1)}$$

ist. *Bernoulli* findet die Summe dieser Reihe gleich 2, benutzt aber im Beweise die divergente Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Der Beweis läßt sich leicht auf eine ganz strenge Form bringen. Setzt man

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

so wird

$$s_n - (s_n - 1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{2}{n(n-1)}\right) + \frac{1}{n},$$

also

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{2}{n(n-1)} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Hieraus folgt

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots = 2.$$

13) *Zu S. 17.* Vgl. *Johann Bernoulli*s Werke, Bd. IV (Anekdota), S. 8. *Johann Bernoulli*s Beweis für die Divergenz der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ ist indirekt. Wäre

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n} = s$$

oder anders geschrieben

$$\sum_2^\infty \frac{n-1}{(n-1)n} = s,$$

so müßte auch die Summe der unendlichen Reihen

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

$$\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gleich s sein. Nun ist aber (vgl. Anm. 12)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=1\,,\quad \text{also}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=\frac{1}{2}\,;$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=\frac{1}{3}\,.$$

. . . .

Man hätte daher

$$s=s+1\,,$$

worin ein Widerspruch liegt.

In den modernen Lehrbüchern findet man gewöhnlich einen Beweis, der dem von *Jakob Bernoulli* (vgl. oben S. 19) ähnlich ist. Die Glieder

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

sind alle größer als

$$\frac{1}{2^{n+1}}\,,$$

und ihre Anzahl gleich

$$2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n\,,$$

ihre Summe also größer als

$$2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\,.$$

Daraus ersieht man, daß

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>\frac{n+1}{2}$$

ist.

14) *Zu S. 19.* Die Summe dieser geometrischen Reihe ist nämlich (nach Nr. VIII) gleich

$$A\,\frac{A-E}{A-B}+E$$

oder, da hier

$$A=\frac{1}{a}\,,\quad B=\frac{1}{a+1}$$

sein soll,

$$1 + \frac{1}{a} - Ea.$$

Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a+1}, \quad \dots$$

setzt *Bernoulli* so lange fort, als die Glieder noch größer als $\frac{1}{a^2}$ sind. Das letzte Glied E ist also das erste, das kleiner oder gleich $\frac{1}{a^2}$ wird, d. h. es ist

$$E \leqq \frac{1}{a^2}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{a} - Ea \geqq o,$$

mithin

$$1 + \frac{1}{a} - Ea \geqq 1.$$

15) *Zu S. 19.* Um zu erkennen, daß

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p^2} > 1 \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

ist, denkt sich *Bernoulli* eine möglichst kurze geometrische Progression

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p+1}, \quad \dots, \quad E$$

gebildet, bei der

$$E < \frac{1}{p^2}$$

ist. Dann hat er (vgl. Anm. 14)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + E > 1,$$

folglich auch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p^2} > 1.$$

Da nämlich die geometrische Progression rascher absteigt als die Reihe $\frac{1}{p}, \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \dots$ so kommt man bei

ihr früher zu einem Gliede, das kleiner oder gleich $\frac{1}{p^2}$ ist. Es gibt also in der Summe

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p^2}$$

mehr Glieder als in $\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + E$, und außerdem ist jedes Glied in dieser kleiner als das entsprechende Glied in jener. Daher ist sicher

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p^2} > \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + E.$$

16) *Zu S. 19.* $\lim u_n = 0$ ist zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$.

17) *Zu S. 14.* *Jakob Bernoulli* hat die Lösung dieses Problems nicht mehr erlebt. Sein Bruder *Johann* konnte sie zunächst auch nicht finden, obwohl er sich eifrig damit beschäftigte. In einem (von *Eneström* in der Bibliotheca Math. 1904, S. 249) veröffentlichten Briefe an *Jakob* sagt er freilich (am 22. Mai 1691): »Ich sehe schon den Weg, um die Summe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ usw. zu finden, was wir früher nicht konnten.« Aber es scheint sich da um einen Irrtum gehandelt zu haben. Da man die genaue Summe der Reihe nicht bestimmen konnte, so berechnete man wenigstens Näherungswerte davon. So gab z. B. *Stirling* in seiner »Methodus differentialis« (1730) einen Näherungswert mit 8 richtigen Dezimalen. (Vgl. den interessanten Aufsatz von *P. Stäckel* in Jahrg. 1907 der Bibl. Math.) *Daniel Bernoulli*, ein Sohn *Johanns*, hat sich ebenfalls mit der Reihe der reziproken Quadrate beschäftigt. Er lebte 1727—1733 in Petersburg und stand in regem Verkehr mit *Leonhard Euler*, der damals auch in Petersburg wirkte. *Euler* war es, der dann im Jahre 1736 die Formel

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

fand. Er teilte sie *Daniel Bernoulli* ohne Beweis mit, und durch ihn erhielt *Johann Bernoulli* Kenntnis davon, der sich selbst einen Beweis dazu machte. Dieser Beweis, der mit dem

*Euler*schen übereinstimmte, beruht auf einer kühnen Verallgemeinerung eines algebraischen Satzes. Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

sind, so ist

$$1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right),$$

mithin

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1 .$$

Nun hat die Gleichung

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots = 0$$

die Wurzeln

$$x_1 = \pi^2, \quad x_2 = 2\pi^2, \quad x_3 = 3\pi^2, \quad \cdots .$$

Überträgt man also jenen algebraischen Satz auf die hier vorliegende transzendente Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \cdots = \frac{1}{3!},$$

d. h.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} .$$

»Auf diese Weise ist« — so sagt *Johann Bernoulli* aus Anlaß der obigen Lösung (*Joh. Bernoullis* Werke, Bd. 4, S. 22) — »dem brennenden Wunsche meines Bruders Genüge geleistet. . . . . Wenn doch der Bruder noch am Leben wäre!«

Übrigens hat *Johann Bernoulli* in einem Briefe an *Euler* (2. April 1737) darauf hingewiesen (vgl. *Stäckels* oben zitierte Arbeit), daß der Beweis die stillschweigende Voraussetzung enthält, daß $\sin x$ nur für $x = \pm n\pi$ verschwindet. *Euler* erkennt diesen Einwand als berechtigt an und gibt noch einen zweiten Beweis für sein Resultat, der vollkommen einwandfrei und äußerst elegant ist. Wir wollen ihn hier kurz wiedergeben.

Für $x < 1$ ist nach der Binomialformel

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots.$$

Daraus folgt*)

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1\,x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\,x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots.$$

Multipliziert man jetzt auf beiden Seiten mit $dx : \sqrt{1-x^2}$ und integriert von 0 bis $x\,(0 < x < 1)$, so folgt*)

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \int\limits_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\cdot 3}\int\limits_0^x \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int\limits_0^x \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots.$$

Läßt man x nach 1 konvergieren, so ergibt sich, wie man leicht in aller Strenge beweisen kann,

$$\frac{\pi^2}{8} = \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\cdot 3}\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int\limits_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots.$$

Das erste Integral in dieser Reihe hat den Wert 1. Die andern findet man, wenn man schreibt

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int\limits_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{n-1}\int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(durch partielle Integration).

Daraus folgt nämlich:

$$(*) \qquad \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^1 \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so daß

---

* Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man gliedweise integrieren.

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}, \quad \int_0^1 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \quad \cdots$$

wird. Die Reihe verwandelt sich jetzt in

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots.$$

Da

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

ist, so hat man (vgl. oben S. 36)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{1}{3}\,\frac{\pi^2}{8},$$

also

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler hat schließlich noch einen dritten Beweis für diese Formel angegeben. Er geht dabei von der Reihe für $(\arcsin x)^2$ aus:

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \frac{1}{1}\,\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{x^6}{6} + \cdots,$$

die man am bequemsten nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet. Multipliziert man beiderseits mit $dx : \sqrt{1-x^2}$, so ergibt sich durch Integration

$$\frac{1}{6}(\arcsin x)^3 = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{3\cdot 4}\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\int_0^x \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

und hieraus, wenn x nach 1 konvergiert,

$$\frac{\pi^3}{6\cdot 8} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{3\cdot 4}\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\int_0^1 \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots.$$

Da

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

ist, so wird nach der Rekursionsformel (*)

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \ldots$$

Unter Benutzung dieser Werte verwandelt sich die Reihe in

$$\frac{\pi^3}{6 \cdot 4} = \frac{1}{2^2}\pi + \frac{1}{4^2}\pi + \frac{1}{6^2}\pi + \cdots.$$

Daraus folgt durch Division mit $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots.$$

Euler fand auch bereits die Summe der allgemeinen Reihe

$$S_{2r} = \frac{1}{1^{2r}} + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \cdots \quad (r = 1, 2, 3, \cdots),$$

und zwar schreibt er die betreffenden Formeln so

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} \pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{2^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6} \pi^6,$$

. . . .

Der Faktor, um den sich S_{2r} von $\frac{(-1)^{r-1} 2^{2r-1}}{(2r)!} \pi^{2r}$ unterscheidet, ist das, was man die $2r$-te *Bernoulli*sche Zahl nennt und mit B_{2r} bezeichnet.

Später hat *Euler* dann noch seinen ersten Beweis dadurch verbessert, daß er die Produktformel

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

aufstellte, aus der man sieht, daß $\sin x$ nur die Nullstellen $\pm n\pi$ hat $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. So ist also *Euler* zu dieser berühmten Formel durch *Jakob Bernoulli*s Problem die Summierung der reziproken Quadratzahlen geführt worden (vgl. *Stäckel* a. a. O.).

18) *Zu S. 24* (vgl. auch S. 20). Hier ist *Bernoulli* ganz nahe an dem bekannten *Cauchy*schen Integralkriterium für die Konvergenz einer unendlichen Reihe. S. 20 folgert er aus der Divergenz der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

die Divergenz des Integrals

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

hier aus der Konvergenz der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

die des Integrals

$$\int_1^x \frac{dx}{x^2}.$$

Danach liegt es nahe, auf das *Cauchy*sche Theorem zu kommen, wonach, wenn $f(x)$ positiv ist und bei wachsendem x abnimmt, die Reihe

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots$$

und das Integral

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

gleichzeitig konvergieren oder divergieren.

19) *Zu S. 25.* Die figurierten Zahlen $n$ter Ordnung bilden eine Reihe, deren Differenzen die figurierten Zahlen $(n-1)$ter Ordnung sind.

In dem Schema

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	.

das sich schon bei *Tartaglia* findet, stehen in jeder Zeile die figurierten Zahlen einer gewissen Ordnung. Zieht man eine von ihnen von der nächstfolgenden ab, so ergibt sich die über dieser stehende Zahl. In jeder der schrägen Linien, die in dem Schema angedeutet sind, stehen zusammengehörige Binomialkoeffizienten.

20 *Zu S. 34.* Die allgemeine Form der hier benutzten Teilreihen ist diese:

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)2}+\frac{1}{(2k+1)2^2}+\frac{1}{(2k+1)2^3}+\cdots=\frac{2}{2k+1}.$$

Daß diese Teilreihen die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

erschöpfen, geht daraus hervor, daß jede der Zahlen 1, 2, 3, ... in der Form

$$(2k+1)2^l \qquad (k, l=0, 1, 2, \ldots)$$

darstellbar ist.

Die Aussage, daß $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ die Hälfte von $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ ist ohne weitern Zusatz sinnlos.

Setzt man

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \text{ und } S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

so ist

$$H_{2n}=S_n+\frac{1}{2}H_n, \text{ also } S_n=H_{2n}-\frac{1}{2}H_n.$$

Nun läßt sich ferner zeigen, daß

$$H_n-\log n-C$$

bei unendlich zunehmendem n nach Null konvergiert. C ist dabei die *Euler*sche Konstante 0,577 215 66 ... Man kann also schreiben

$$H_n=\log n+C+\varrho_n$$

und weiß dann, daß $\lim \varrho_n=0$ ist. Ferner ergibt sich

$$S_n=\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{2}C+\log 2+\varrho_{2n}-\frac{1}{2}\varrho_n$$

und

$$\frac{S_n}{H_m} = \frac{\frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}C + \varrho_{2n} - \frac{1}{2}\varrho_n}{\log m + C - \varrho_m}.$$

Wenn m und n beide unbegrenzt zunehmen, und zwar so, daß das Verhältnis $\log n : \log m$ einem endlichen Grenzwert λ zustrebt, so wird

$$\lim \frac{S_n}{H_m} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{\log n}{\log m}\right) = \frac{\lambda}{2}\cdot$$

Setzt man, was wohl *Bernoulli* im Sinn hat, $m = n$, so erhält man, übereinstimmend mit seiner Angabe,

$$\lim \frac{S_n}{H_m} = \frac{1}{2},$$

d. h.

$$\lim\left(\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{2}\cdot$$

21) *Zu S. 37.* Setzt man

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m},\\ y_n &= \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^m},\end{aligned}\right| \quad (m > 0)$$

so ist

$$\begin{aligned} x_{2n} - y_n &= \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots + \frac{1}{(2n)^m}\\ &= \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}\right) = \frac{1}{2^m}x_n,\end{aligned}$$

also

$$y_n = x_{2n} - \frac{1}{2^m}x_n.$$

Offenbar liegt nun der Wert des Integrals

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^m} = \int_1^2 \frac{dx}{x^m} + \int_2^3 \frac{dx}{x^m} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^m}$$

zwischen

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m} = x_n$$

und

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m} = x_n + \frac{1}{(n+1)^m} - 1 \,.$$

Setzen wir daher

$$x_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^m} + z_n \,,$$

so ist

$$0 < z_n < 1 - \frac{1}{(n+1)^m} \,,$$

z_n gehört also dem Intervall (0,1) an.

Nach dem Obigen wird

$$y_n = \int_1^{2n+1} \frac{dx}{x^m} - \frac{1}{2^m} \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^m} + z_{2n} - \frac{1}{2^m} z_n \,,$$

d. h. im Falle $0 < m < 1$

$$y_n = \frac{1}{1-m} \left\{ (2n+1)^{1-m} - \frac{1}{2^m} (n+1)^{1-m} + \lambda_n \right\} ,$$

wobei

$$\frac{\lambda_n}{1-m} = z_{2n} - \frac{1}{2^m} z_n + \frac{1}{1-m} \left(\frac{1}{2^m} - 1 \right)$$

gesetzt ist. λ_n bleibt bei wachsendem n zwischen endlichen Grenzen. Dividiert man y_n durch

$$x_{n'} = \frac{1}{1-m} \{ (n'+1)^{1-m} - 1 \} + z_{n'} = \frac{1}{1-m} \{ (n'+1)^{1-m} + \mu_{n'} \}$$

($\mu_{n'}$ bleibt zwischen endlichen Grenzen), so ergibt sich

$$\frac{y_n}{x_{n'}} = \frac{(2n+1)^{1-m} - \frac{1}{2^m}(n+1) + \lambda_n}{(n'+1)^{1-m} + \mu_{n'}} \,.$$

Wenn n und n' unbegrenzt wachsen und dabei $n : n'$ einem Grenzwert zustrebt, findet man

$$\lim \frac{y_n}{x_{n'}} = \lim \frac{(2n+1)^{1-m} - \frac{1}{2^m}(n+1)^{1-m}}{(n'+1)^{1-m}}$$

$$= \lim \left(\frac{n}{n'}\right)^{1-m} \lim \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{1-m} - \frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-m}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-m}} = \frac{1}{2^m} \lim \left(\frac{n}{n'}\right)^{1-m}.$$

Im Falle $n = n'$ hat man

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{2^m}.$$

Setzt man $m = \frac{1}{2}$, so ist hiernach

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n'}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\lim \frac{n}{n'}}.$$

Das *Bernoulli*sche Paradoxon kommt heraus, wenn man n und n' so unendlich zunehmen läßt, daß

$$\lim \frac{n}{n'} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

wird. Der Fehler, der dem Paradoxon zugrunde liegt, ist der, daß zwei divergenten Reihen ein bestimmtes Verhältnis zugeschrieben wird. Man kann nämlich jedes Verhältnis herausbekommen, wenn man n und n' in geeigneter Weise unendlich werden läßt.

22) *Zu S. 41.* Es handelt sich hier um folgenden Prozeß:

$$a_1 = \sqrt{a},$$
$$a_2 = a a_1,$$
$$a_3 = \sqrt{a_2},$$
$$a_4 = a a_3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Dabei werden abwechselnd die beiden Operationen des Ausziehens der Quadratwurzel und der Multiplikation mit a angewandt.

Wenn *Bernoulli* von der letzten Quadratwurzel spricht, so meint er damit nichts anderes als

$$\lim a_{2n-1},$$

d. h. den Grenzwert der Folge $a_1, a_3, a_5, \cdots$. Die Art, wie er die letzte Wurzel schreibt, ist zu beanstanden. Man kann eben eine unendliche Zahlenfolge nicht von rückwärts aufschreiben.

Was den Beweis des Satzes

$$\lim a_{2n-1} = a$$

anbetrifft, so setzt er die Existenz von $\lim a_{2n-1}$ voraus. *Bernoullis* Gedankengang ist, modern ausgedrückt, dieser:

Wenn $\lim a_{2n-1} = x$ ist, so ist auch

$$\lim a_{2n+1} = x.$$

Nun hat man aber

$$a_{2n+1} = \sqrt{a_{2n}} = \sqrt{a a_{2n-1}},$$

so daß

$$x = \sqrt{ax} \quad \text{oder} \quad x^2 = ax$$

wird, woraus er dann $x = a$ folgert.

Wir wollen (worin keine wesentliche Beschränkung liegt $a > 1$ annehmen. Dann ist

$$1 < a_1 < a,$$
$$a_1 < a_3 < a,$$
$$a_3 < a_5 < a,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir sehen auf diese Weise, daß $a_1, a_3, a_5, \cdots$ eine aufsteigende Folge ist, deren Glieder aber alle kleiner als a sind. Daraus folgt die Existenz von $\lim a_{2n-1}$.

Man kann den unendlichen Prozeß, der die Folge $a_1, a_3, a_5, \cdots$ liefert, auch so beschreiben. Zuerst nimmt man das geometrische Mittel a_1 zwischen 1 und a, dann das geometrische Mittel a_3 zwischen a_1 und a, dann das geometrische Mittel a_5 zwischen a_3 und a u. s. f.

23) *Zu S. 42.* Hier handelt es sich um folgenden unendlichen Prozeß:

$$a_1 = \sqrt{a},$$
$$a_2 = a_1 + a,$$
$$a_3 = \sqrt{a_2},$$
$$a_4 = a_3 + a,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

An die Stelle der Multiplikation mit a (in Nr. XXVII) ist jetzt die Addition zu a getreten.

Wieder spricht *Bernoulli* von der letzten Quadratwurzel, womit er

$$\lim a_{2n-1}$$

meint. Indem er die Existenz dieses Grenzwertes ohne Beweis voraussetzt, zeigt er, daß

$$\lim a_{2n-1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

ist. Setzt man

$$\lim a_{2n-1} = x,$$

so ist auch

$$x = \lim a_{2n+1} = \lim \sqrt{a + a_{2n-1}} = \sqrt{a + x},$$

mithin

$$x^2 - x = a \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}},$$

da x positiv sein muß.

Offenbar ist

$$a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = a_1.$$

Hat man aber bewiesen, daß

$$a_{2n-1} > a_{2n-3}$$

ist, so folgt

$$a_{2n+1} = \sqrt{a + a_{2n-1}} > \sqrt{a + a_{2n-3}} = a_{2n-1}.$$

Die Folge $a_1, a_3, a_5, \ldots$ ist also aufsteigend. Zeigt man außerdem, daß alle ihre Glieder unterhalb einer festen Grenze liegen, so ist die Existenz von $\lim a_{2n-1}$ bewiesen. Man hat aber

$$a_{2n-1} = \sqrt{a + a_{2n-3}} < \sqrt{a + a_{2n-1}},$$

also

$$a_{2n-1}^2 - a_{2n-1} < a,$$

d. h.

$$\left(a_{2n-1} - \frac{1}{2}\right)^2 < a + \frac{1}{4}, \quad \text{also} \quad a_{2n-1} < \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

24) *Zu S. 42.* Hier wird der folgende unendliche Prozeß vorgenommen:

$$x_0 = 1,$$
$$x_1 = a\sqrt{x_0},$$
$$x_2 = b\sqrt{x_1},$$
$$x_3 = a\sqrt{x_2},$$
$$x_4 = b\sqrt{x_3},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und *Bernoulli* sucht die Quadratwurzel des letzten Produkts, d. h. er sucht

$$\lim \sqrt{x_{2n-1}} \quad \text{oder} \quad \lim \sqrt{x_{2n}}.$$

Um die Existenzfrage kümmert er sich nicht. Er schreibt einfach

$$\lim \sqrt{x_{2n-1}} = x = \lim \sqrt{x_{2n+1}} = \lim \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{x_{2n-1}}}} = \sqrt{a\sqrt{bx}}$$

und erhält auf diese Weise

$$x^4 = a^2 b x, \quad x = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Dann ist aber zugleich

$$x' = \lim \sqrt{x_{2n}} = \lim \sqrt{b\sqrt{x_{2n-1}}} = \sqrt{bx} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

$\sqrt[3]{a^2 b}$ und $\sqrt[3]{ab^2}$ sind mittlere geometrische Proportionalen zwischen a und b. Man hat nämlich:

$$a : \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{ab^2} : b.$$

Die Auffindung von zwei mittleren Proportionalen ist ein sehr altes Problem, das mit der Verdopplung des Würfels zusammenhängt. $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ sind nämlich zwei solche Proportionalen zwischen 1 und 2. Das *Bernoulli*sche Verfahren, das, ins Geometrische übersetzt, kein anderes Hilfsmittel als Lineal und Zirkel verlangt, löst dieses alte Problem, allerdings durch einen unendlichen Prozeß. (Vgl. *Bernoulli*s Bemerkung am Schluß von Nr. XXXV, S. 45.)

Setzt man

$$x_{2n-1} = a^{\lambda_n} b^{\mu_n},$$

so wird wegen

$$x_{2n+1} = a\sqrt{x_{2n}} = a\sqrt{b\sqrt{x_{2n-1}}} = ab^{\frac{1}{2}} x_{2n-1}^{\frac{1}{4}}$$

offenbar

$$a^{\lambda_{n+1}} b^{\mu_{n+1}} = a^{1+\frac{\lambda_n}{4}} b^{\frac{1}{2}+\frac{\mu_n}{4}},$$

so daß

$$\lambda_{n+1} = 1 + \frac{\lambda_n}{4}, \quad \mu_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{\mu_n}{4}$$

ist. Hieraus folgt, weil $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$,

$$\lim \lambda_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\lim \mu_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4^2} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

mithin

$$\lim \sqrt{x_{2n-1}} = \lim \left(a^{\frac{\lambda_n}{2}} b^{\frac{\mu_n}{2}}\right) = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Hiermit ist mit einem Schlage die Existenz und der Wert des fraglichen Grenzwertes bewiesen.

25) *Zu S. 43.* Der unendliche Prozeß ist diesmal folgender:

$$x_1 = ab,$$
$$x_2 = a\sqrt[3]{x_1},$$
$$x_3 = ab\sqrt{x_2},$$
$$x_4 = a\sqrt[3]{x_3},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Setzt man

$$x_{2n-1} = a^{\lambda_n} b^{\mu_n}, \quad x_{2n} = a^{\lambda'_n} b^{\mu'_n},$$

so wird wegen

$$x_{2n} = a\sqrt[3]{x_{2n-1}}, \quad x_{2n+1} = ab\sqrt{x_{2n}}$$

offenbar

$$\lambda'_n = 1 + \frac{\lambda_n}{3}, \qquad \mu'_n = \frac{\mu_n}{3},$$

$$\lambda_{n+1} = 1 + \frac{\lambda'_n}{2}, \quad \mu_{n+1} = 1 + \frac{\mu'_n}{2},$$

also

$$\lambda_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{\lambda_n}{6}, \quad \mu_{n+1} = 1 + \frac{\mu_n}{6}.$$

Hieraus folgt, da $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ ist,

$$\lim \lambda_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2 \cdot 6} + \frac{3}{2 \cdot 6^2} + \cdots = \frac{9}{5},$$

$$\lim \mu_n = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{6}{5}.$$

Hiernach wird nun

$$\lim \sqrt[3]{x_{2n-1}} = \lim \left(a^{\frac{\lambda_n}{3}} b^{\frac{\mu_n}{3}} \right) = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^3 b^2}$$

und

$$\lim \sqrt{x_{2n}} = \lim \left(a^{\frac{\lambda'_n}{2}} b^{\frac{\mu'_n}{2}} \right) = \lim \left(a^{\frac{1}{2} + \frac{\lambda_n}{6}} b^{\frac{\mu_n}{6}} \right) = a^{\frac{4}{5}} b^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^4 b}.$$

$\sqrt[5]{a^3 b^2}$ und $\sqrt[5]{a^4 b}$ sind zwei von den vier mittleren Proportionalen

$$\sqrt[5]{a^4 b}, \quad \sqrt[5]{a^3 b^2}, \quad \sqrt[5]{a^2 b^3}, \quad \sqrt[5]{a b^4}$$

zwischen a und b.

26) *Zu S. 44.* Hier ist

$$x_1 = b,$$
$$x_2 = a\sqrt{x_1},$$
$$x_3 = a\sqrt{x_2},$$
$$x_4 = b\sqrt{x_3},$$
$$x_5 = a\sqrt{x_4},$$
$$x_6 = a\sqrt{x_5},$$
$$x_7 = b\sqrt{x_6},$$
$$\cdots\cdots$$

Setzt man

$$x_{3n} = a^{\lambda_n} b^{\mu_n}, \quad x_{3n+1} = a^{\lambda'_n} b^{\mu'_n}, \quad x_{3n+2} = a^{\lambda''_n} b^{\mu''_n},$$

so bestehen folgende Relationen

$$\lambda'_n = \frac{\lambda_n}{2}, \qquad \mu'_n = 1 + \frac{\mu_n}{2},$$

$$\lambda''_n = 1 + \frac{\lambda'_n}{2}, \qquad \mu_n = \frac{\mu'_n}{2},$$

$$\lambda_{n+1} = 1 + \frac{\lambda''_n}{2}, \quad \mu_{n+1} = \frac{\mu''_n}{2}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{\lambda_n}{8}, \quad \mu_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\mu_n}{8}.$$

Da

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0,$$

so ergibt sich

$$\lim \lambda_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2 \cdot 8} + \frac{3}{2 \cdot 8^2} + \cdots = \frac{12}{7},$$

$$\lim \mu_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 8^2} + \cdots = \frac{2}{7},$$

mithin

$$\lim \sqrt{x_{3n}} = \lim \left(a^{\frac{\lambda_n}{2}} b^{\frac{\mu_n}{2}} \right) = \sqrt[7]{a^6 b}.$$

Ferner ist

$$\lim \sqrt{x_{3n+1}} = \lim \left(a^{\frac{\lambda_n}{4}} b^{\frac{1}{2} + \frac{\mu_n}{4}} \right) = \sqrt[7]{a^3 b^4},$$

$$\lim \sqrt{x_{3n+2}} = \lim \left(a^{\frac{1}{2} + \frac{\lambda_n}{8}} b^{\frac{1}{4} + \frac{\mu_n}{8}} \right) = \sqrt[7]{a^5 b^2}.$$

$\sqrt[7]{a^6 b}$, $\sqrt[7]{a^3 b^4}$, $\sqrt[7]{a^5 b^2}$ sind drei von den sechs mittleren Proportionalen

$$\sqrt[7]{a^6 b}, \quad \sqrt[7]{a^5 b^2}, \quad \sqrt[7]{a^4 b^3}, \quad \sqrt[7]{a^3 b^4}, \quad \sqrt[7]{a^2 b^5}, \quad \sqrt[7]{a b^6}$$

zwischen a und b.

27) *Zu S. 44. Bernoulli* nimmt hier folgenden unendlichen Prozeß vor:

$$x_1 = p^2 + q\sqrt{x_0},$$
$$x_2 = -p + \sqrt{x_1},$$
$$x_3 = p^2 + q\sqrt{x_2},$$
$$x_4 = -p + \sqrt{x_3},$$
$$\cdots\cdots$$

und behauptet, daß

$$\lim \sqrt{x_{2n}}$$

eine Wurzel der kubischen Gleichung $x^3 + 2px - q = 0$ ist.

Sobald die Existenz von $\lim \sqrt{x_{2n}}$ feststeht, liegt das letztere auf der Hand. Man hat nämlich

$$x_{2n+2} = -p + \sqrt{x_{2n+1}} = -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_{2n}}},$$

also wenn $\lim \sqrt{x_{2n}} = \lim \sqrt{x_{2n+2}} = x$ gesetzt wird,

$$x^2 = -p + \sqrt{p^2 + qx}\,,$$

woraus

$$(x^2 + p)^2 = p^2 + qx\,, \text{ d. h. } x^4 + 2px^2 - qx = 0$$

folgt und, wenn man sich überzeugt hat, daß $x \gtrless 0$ ist, $x^3 + 2px - q = 0$. Hiermit wird sich *Bernoulli* begnügt haben. Es ist nicht schwer, den Existenzbeweis hinzuzufügen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß

$$x_2 > x_0$$

ist, d. h.

$$-p + \sqrt{x_1} = -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_0}} > x_0$$

oder $(x_0 + p)^2 < p^2 + q\sqrt{x_0}$, mithin

$$x_0^2 + 2px_0 - q\sqrt{x_0} < 0, \text{ also } \sqrt{x_0}^3 + 2p\sqrt{x_0} - q < 0.$$

Dann ist $x_0, x_2, x_4, \ldots$ eine aufsteigende Folge. Hat man nämlich schon gezeigt, daß $x_{2n-2} < x_{2n}$ ist, so folgt aus

$$x_{2n+2} = -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_{2n}}}$$

sofort

$$x_{2n+2} > -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_{2n-2}}} = x_{2n}.$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß x_{2n} unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Man hat aber

$$x_{2n} = -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_{2n-2}}} < -p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{x_{2n}}}\,,$$

also

$$(x_{2n} + p)^2 < p^2 + q\sqrt{x_{2n}} \quad \text{oder} \quad x_{2n}^2 + 2px_{2n} - q\sqrt{x_{2n}} < 0\,,$$

woraus schon folgt, daß x_{2n} nicht beliebig groß werden kann, weil sonst die linke Seite der Ungleichung positiv ausfiele.

Geht man also von einer Zahl $x = \sqrt{x_0}$ aus, die $x^3 + 2px - q$ negativ macht, so liefert das *Bernoulli*sche Verfahren eine Folge

$$\sqrt{x_0}\,,\ \sqrt{x_2}\,,\ \sqrt{x_4}\,,\ \ldots,$$

die aufsteigend nach einer Wurzel der Gleichung

$$x^3 + 2px - q = 0$$

konvergiert.

Ebenso beweist man, daß im Falle $\sqrt{x_0}^3 + 2p\sqrt{x_0} - q > 0$ die *Bernoulli*sche Folge absteigend nach einer Wurzel jener Gleichung konvergiert.

Bernoulli bietet hier ein mit Zirkel und Lineal operierendes Verfahren zur angenäherten Auflösung der Gleichung dritten Grades $x^3 + 2px - q = 0$, die übrigens nur eine reelle, und zwar positive, Wurzel hat.

28) *Zu S. 45.* Hier ist

$$\begin{aligned} x_1 &= p^2 + q\sqrt{x_0}, \\ x_2 &= p + \sqrt{x_1}, \\ x_3 &= p^2 + q\sqrt{x_2}, \\ x_4 &= p + \sqrt{x_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und es handelt sich um $\lim \sqrt{x_{2n}}$.

29) *Zu S. 45.* Hier ist

$$\begin{aligned} x_1 &= p^2 - q\sqrt{x_0}, \\ x_2 &= p \pm \sqrt{x_1}, \\ x_3 &= p^2 - q\sqrt{x_2}, \\ x_4 &= p \pm \sqrt{x_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

uud es handelt sich um $\lim \sqrt{x_{2n}}$.

30) *Zu S. 45.* Hier ist

$$\begin{aligned} x_1 &= p^2 + r + q\sqrt{x_0}, \\ x_2 &= -p + \sqrt{x_1}, \\ x_3 &= p^2 + r + q\sqrt{x_2}, \\ x_4 &= -p + \sqrt{x_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und es handelt sich um $\lim x_{2n}$. Wir haben hier eine angenäherte Auflösung einer Gleichung vierten Grades mit Zirkel und Lineal vor uns.

31) *Zu S. 45.* Das sind Probleme, die sich auf eine Gleichung dritten oder höheren Grades zurückführen lassen.

32) *Zu S. 45.* In der zitierten Arbeit sind die hier analytisch dargestellten Ergebnisse ins Geometrische übersetzt.

33) *Zu S. 53.* *Bernoulli* zeigt hier, wie man eine Potenzreihe integriert. Er wendet ohne Bedenken die gliedweise Integration an.

34) *Zu S. 56.* Das bedeutet in moderner Ausdrucksweise

$$\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\lim \frac{1+4+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}\,,$$

. . . .

Aus

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)!} - \frac{(n-1)n\cdots(n+k-1)}{(k+1)!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

folgt, wenn man n gleich $1, 2, \cdots, n$ nimmt und summiert,

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{(k+1)!} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\nu=1}^{n}\{\nu^k + c_1\nu^{k-1} + \cdots + c_k\}\,.$$

Setzt man

$$s_\varkappa = 1^\varkappa + 2^\varkappa + \cdots + n^\varkappa\,,$$

so lautet die Formel

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1} = s_k + c_1 s_{k-1} + \cdots + c_k s_0$$

oder

$$\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{s_k}{n^{k+1}} + c_1\frac{s_{k-1}}{n^k}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + c_k\frac{s_0}{n}\cdot\frac{1}{n^k}\,.$$

Weiß man also bereits, daß für $\varkappa < k$

$$\lim \frac{s_\varkappa}{n^{\varkappa+1}} = \frac{1}{\varkappa+1}$$

ist, so ergibt sich

$$\lim \frac{s_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}\,.$$

35) *Zu S. 69.* Vgl. *Ostwalds* Klassiker, Nr. 162, S. 13. Die Gleichung der Logarithmica ist

$$y = a e^{\frac{x}{b}}\,.$$

Daraus folgt:

$$\text{Subtangente} = \frac{y}{y'} = b\,.$$

Setzen wir mit *Bernoulli* $a = 1$ und schreiben

$$x = \operatorname{Log} y\,,$$

so ist, da außerdem die Relation

$$x = b \log \operatorname{nat} y$$

besteht, b der Modul des zu der Logarithmica $y = e^{\frac{x}{b}}$ gehörigen Logarithmensystems.

36) *Zu S. 71.* Sinus des Komplements (complementi sinus) ist das, was wir jetzt Kosinus nennen. Sinus rectus bedeutet, wenn der Radius 1 ist, dasselbe wie jetzt Sinus.

37) *Zu S. 73.* Vgl. die *Leibniz*sche Arbeit über die Kettenlinie in Nr. 162 der *Ostwald*schen Klassiker. Das Problem der Kettenlinie versuchte schon *Galilei* zu lösen, der sie für eine Parabel erklärte. Nachdem man den Irrtum *Galileis* erkannt hatte, legte *Jakob Bernoulli* (Mai 1690) die Aufgabe den Mathematikern noch einmal vor. *Leibniz*, *Huygens* und *Johann Bernoulli* lieferten Lösungen.

38) *Zu S. 75.* Die zitierte Arbeit ist von *Jakob Bernoulli* und hat den Titel: »Über die Loxodromen der Seeleute«. Ist x die geographische Länge und y die Breite, so liefert das infinitesimale Dreieck

$$(x, y), \quad (x, y + dy), \quad (x + dx, y + dy),$$

dessen Katheten gleich dy und $\cos y\,dx$ sind,

$$t = \frac{\cos y\,dx}{dy}, \quad \text{d. h.} \quad dx = \frac{t\,dy}{\cos y}\,.$$

Das ist die *Bernoulli*sche Formel für dx, weil er $\cos y = z$ setzt, wonach dann

$$dy = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

wird.

39) *Zu S. 80.* Hierüber hat *Bernoulli* eine besondere Arbeit geschrieben.

40) *Zu S. 89.* Allgemein ist

$$\left(\frac{l}{m-n}\right)^r = \frac{l^r}{m^r} + \frac{r}{1}\frac{l^r n}{m^{r+1}} + \frac{r(r+1)}{1\cdot 2}\frac{l^r n^2}{m^{r+2}} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{l^r n^3}{m^{r+3}} + \cdots.$$

Durch einen kühnen Analogieschluß kommt *Wallis* dazu, diese Formel auch dann noch gelten zu lassen, wenn r keine positive ganze Zahl mehr ist. Natürlich liegt in diesem Analogieschluß kein Beweis.

41) *Zu S. 92.* Die Bezeichnung des letzten Gliedes in dem unendlichen Produkt

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots$$

mit $(\infty - 1):\infty$ ist für *Bernoullis* Auffassung charakteristisch. Auch bei den unendlichen Reihen sahen wir, wie er immer mit dem l e t z t e n Gliede operiert.

42) *Zu S. 93.* Dies ist die *Newton*sche Binominalformel. Sie läßt sich am bequemsten mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten beweisen. Man setzt

$$(1+x)^p = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

und findet hieraus durch Differentiation

$$p(1+x)^{p-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$p(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) = (1+x)(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots),$$

so daß

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = 1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots$$

Man überzeugt sich nun nachträglich, daß diese Reihe für $|x| < 1$ konvergiert, und ihre Summe $\varphi(x)$ gleich $(1+x)^p$ ist. Um das letztere zu erkennen, geht man von der Relation

$$p\varphi(x) = (1+x)\varphi'(x)$$

aus. Aus ihr folgt

$$\left(\frac{\varphi(x)}{(1+x)^p}\right)' = 0,$$

d. h.

$$\varphi(x) = c(1+x)^p.$$

Da $\varphi(x)$ und $(1+x)^p$ für $x = 0$ beide gleich 1 sind, hat die Konstante c den Wert 1.

43) *Zu S. 91.* Es handelt sich hier um die Methode der unbestimmten Koeffizienten, über die auch *Leibniz* eine schöne Arbeit geschrieben hat (vgl. Nr. 162 der *Ostwald*schen Klassiker, S. 19 ff.).

44) *Zu S. 91.* Zwei Arbeiten von *Jakob Bernoulli.*

45) *Zu S. 95.* Das betrachtete Differential ist ein elliptisches.

46) *Zu S. 102.* Dieser Beweis läßt sich leicht auf eine strenge Form bringen. Es kommt darauf an, zu zeigen, daß

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

ist. Setzen wir $x > 0$ voraus, so sind in der Entwicklung

$$1+\frac{n}{1}\cdot\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{n^2}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1}x+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$

alle Glieder positiv und nicht größer als die entsprechenden Glieder der Reihe $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$.

Daher hat man für $n > m$ (m eine feste Zahl)

$$1+\frac{1}{1!}x+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}x^m+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)}{(m+1)!}x^{m+1}$$

$$<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

Für genügend großes n wird also

$$1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^m}{m!}<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

sein. Das bedeutet aber

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

47) *Zu S. 102.* Die Berechnung von $\log(1 + x)$, $x > 0$, wird hier auf die von $\log(1 - y)$ zurückgeführt, wobei zwischen x und y die Relation

$$(1 + x)(1 - y) = 1,$$

d. h.

$$y = \frac{x}{1 + x}$$

besteht. Da $y < x$ ist, so konvergiert die Reihe

$$\log(1 - y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \cdots,$$

besser als

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = -\log(1 - y).$$

Für $x = 1$ hat man z. B.

$$\log 2 = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots,$$

wonach sich $\log 2$ sehr bequem berechnen läßt.

48) *Zu S. 104.* Man denke sich z. B., daß der Zinsfuß 4% aufs Jahr beträgt. 1 Mark wächst dann, wenn immer nach $\frac{1}{n}$ Jahr die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, in $\frac{1}{n}$ Jahr zu

$$1 + \frac{0.04}{n} = 1 + \frac{1}{25\,n}$$

Mark an, also in

$$x = \frac{\nu}{n}$$

Jahren zu

$$\left(1 + \frac{1}{25\,n}\right)^{\nu} = \left(1 + \frac{1}{25\,n}\right)^{nx}.$$

Läßt man n unbegrenzt zunehmen, also die Verzinsung kontinuierlich werden, so hat man nach x Jahren statt 1 Mark

$$\lim \left(1 + \frac{1}{25\,n}\right)^{nx} = e^{\frac{x}{25}} = 1 + \frac{x}{25} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{25}\right)^2 + \cdots$$

Mark. Nach 25 Jahren sind es gerade e Mark.



Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777. Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ 1.20.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg.) von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ —.80.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 1.80.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte u. in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier,** Die Auflös. der bestimmten Gleich. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff,** Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren. (1815.) Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

» 130. **N. J. Lobatschefskij,** Pangeometrie. (Kasan 1856.) Übers. u. herausgeg. von Heinrich Liebmann. Mit 30 Textfiguren. (95 S.) ℳ 1.70.

Nr. 133. **J. H. Lambert**, Bahnbestimmung der Cometen. Herausgegeben von J. Bauschinger. Mit 35 Textfiguren. (149 S.) ℳ 2.40.

» 135. **C. F. Gauss**, Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. (1829.) Übers. v. Rudolf H. Weber. Herausg. v. H. Weber. Mit 1 Textfigur. (73 S.) ℳ 1.20.

» 138. **Christian Huygens**, Bewegung der Körper durch d. Stoß. Centrifugalkraft. Herausgeg. von Felix Hausdorff. Mit 49 Textfiguren. (79 S.) ℳ 1.40.

» 141. **J. F. Encke**, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — **P. A. Hansen**, Über d. Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Herausg. von J. Bauschinger. (162 S.) ℳ 2.50.

» 143. **C. Sturm**, Abhandl. über die Auflösung d. numerischen Gleichungen. (1835.) Aus dem Französischen übersetzt u. herausgeg. v. Alfred Loewy. (66 S.) ℳ 1.20.

» 144. **Johannes Kepler**, Dioptrik. (Augsburg 1611.) Übersetzt und herausgeg. v. Ferdinand Plehn. Mit 43 Textfiguren. (114 S.) ℳ 2.—.

» 146. **Joseph Louis Lagrange**, Über die Lös. d. unbestimmten Probleme zweiten Grades. (1768.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgeg. von Eugen Netto. (131 S.) ℳ 2.20.

» 151. **L. Poinsot** (1809), **A. L. Cauchy** (1811), **J. Bertrand** (1858), **A. Cayley** (1859), Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper. Übersetzt und herausgegeben von Robert Haußner. Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (128 S.) ℳ 2.80.

» 153. **Bernard Bolzano**, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — **Hermann Hankel**, Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. (115 S.) ℳ 1.80.

» 155. **Quintino Sella**, Abhandlungen zur Kristallographie. Herausgeg. von F. Zambonini in Neapel. Mit 8 Fig. im Text. (44 S.) ℳ —.80.

» 156. **C. G. J. Jacobi**, Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Herausgegeben von G. Kowalewski. (227 S.) ℳ 4.—.

» 162. **Leibniz** Analysis des Unendlichen. Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von Gerhard Kowalewski. Mit 9 Textfiguren. (84 S.) ℳ 1.60.

» 164. **Newtons** Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus d. Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski. Mit 8 Textfiguren. (66 S.) ℳ 1.50.

» 165. **Johannes Kepler**, Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. (1615.) Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von R. Klug. Mit 29 Textfiguren. (130 S.) ℳ 2.60.

» 167. **Lagrange, Rodrigues, Jacobi** und **Gauss**, Abhandlungen über die Prinzipien der Mechanik. Herausgeg. von Philip E. B. Jourdain. Mit 3 Abbildungen im Text. (68 S.) ℳ 1.40.

» 169. **Thomas Bayes**, Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Herausgeg. von H. E. Timerding. Mit 3 Textfiguren. (59 S.) ℳ 1.20.

» 171. **Jakob Bernoulli**, Über unendliche Reihen (1689—1704). Herausgeg. von G. Kowalewski. Mit 12 Figuren im Text. (141 S.) ℳ 2.50.

